

Е.М.НИКИТИН

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ



Е. М. НИКИТИН

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

ИЗДАНИЕ ДЕСЯТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для техникумов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1977

531

Н62

УДК 531.01 (075.2)

Теоретическая механика для техникумов.
Никитин Е. М. Изд. 10-е, переработанное, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1977, 416 стр.

Учебник составлен в соответствии с программой курса теоретической механики для машиностроительных техникумов.

Большое внимание в книге уделено истолкованию основных понятий и положений теоретической механики и их связи с реальной действительностью и технической практикой. Помимо общих методических указаний к решению задач, дано подробное решение большого числа типовых задач.

Учебник рассчитан на учащихся техникумов очной и заочной систем обучения, но может быть использован и для самостоятельного изучения основ теоретической механики.

Табл. 22, илл. 258.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к десятому изданию	9
Из предисловия к восьмому изданию	10
Введение	11
§ 1. Предмет и метод теоретической механики	11
§ 2*. Краткий исторический очерк	15
§ 3. Основные законы классической механики	18
§ 4. Понятие силы	22
§ 5. Скалярные и векторные величины	25

Раздел I

СТАТИКА

Глава I. Введение в статику	28
§ 6. Предмет и аксиомы статики	28
§ 7. Связи и реакции связей	33
Глава II. Плоская система сходящихся сил	42
§ 8. Сходящиеся силы. Сложение двух сил, приложенных в одной точке	42
§ 9. Разложение силы на две сходящиеся составляющие	45
§ 10. Силовой многоугольник	49
§ 11. Проекция вектора на ось. Определение вектора по его проекциям	53
§ 12. Проекция геометрической суммы векторов на ось	57
§ 13. Аналитическое определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил	58
§ 14. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил	60
§ 15. Теоремы о равновесии трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости	61

§ 16. Замечания к решению задач о равновесии системы сил	63
§ 17*. Общие сведения о фермах и их расчете. Способ вырезания узлов	68
Глава III. Система двух параллельных сил	74
§ 18. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону	74
§ 19. Сложение двух не равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны	76
§ 20. Разложение силы на две параллельные ей составляющие	78
Глава IV. Теория пар на плоскости. Момент силы относительно точки	82
§ 21. Пара сил	82
§ 22. Момент силы относительно точки (центра)	85
§ 23. Свойства пар	87
§ 24. Сложение пар. Условие равновесия пар	90
Глава V. Силы, расположенные произвольно на плоскости	94
§ 25. Теорема Пуансо о параллельном переносе силы	94
§ 26. Приведение плоской системы сил к одному центру. Главный вектор и главный момент	95
§ 27. Случай, когда плоская система сил приводится к одной паре	97
§ 28. Случай, когда плоская система сил приводится к равнодействующей	99
§ 29. Условия равновесия произвольной плоской системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Условие равновесия рычага	103
§ 30. Различные формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил	106
§ 31. Замечания к решению задач о равновесии плоской системы сил	109
§ 32. Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил	114
§ 33. Равновесие системы сочлененных тел	117
§ 34*. Определение усилий в стержнях фермы способом разрезов	121
§ 35*. Статически определенные и статически неопределенные задачи	124

Глава VI. Трение	128
§ 36. Два основных вида трения	128
§ 37. Трение скольжения	129
§ 38. Угол и конус трения	136
§ 39. Трение качения	139
Глава VII. Пространственная система сил	144
§ 40. Пространственная система сходящихся сил	144
§ 41. Момент силы относительно оси	152
§ 42. Условия равновесия системы сил, как угодно расположенных в пространстве	155
§ 43. Уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил	160
§ 44. Равновесие тела, имеющего неподвижную ось	163
Глава VIII. Центр параллельных сил и центр тяжести тела	168
§ 45. Центр параллельных сил	168
§ 46. Понятие о центре тяжести тела	171
§ 47. Координаты центра тяжести тела. Статический момент площади плоской фигуры	172
§ 48. Центр тяжести симметричного тела	175
§ 49. Положение центра тяжести некоторых однородных тел простейшей формы	176
§ 50. Определение положения центра тяжести фигур и тел сложной формы	180
Глава IX. Устойчивость равновесия	187
§ 51. Понятие устойчивости равновесия тела, имеющего точку опоры или ось вращения	187
§ 52. Устойчивость тела, опирающегося на плоскость	189

Раздел II

КИНЕМАТИКА

Глава X. Введение в кинематику	194
§ 53. Предмет и основные понятия кинематики	194
§ 54. Способы задания движения точки	197
Глава XI. Скорость точки	205
§ 55. Понятие скорости точки	205
§ 56. Определение скорости точки при естественном способе задания движения	207

§ 57*. Определение скорости точки по уравнениям ее движения в прямоугольных координатах	210
Глава XII. Ускорение точки	215
§ 58. Понятие ускорения точки	215
§ 59. Определение ускорения точки при задании ее движения естественным способом. Касательное и нормальное ускорения	219
§ 60*. Определение ускорения точки по уравнениям ее движения в прямоугольных координатах	226
Глава XIII. Частные случаи движения точки	231
§ 61. Равномерное движение точки , , , , ,	231
§ 62. Прямолинейное неравномерное движение точки	233
§ 63. Равномерно переменное движение точки	240
Глава XIV. Простейшие виды движения твердого тела , , . . .	249
§ 64. Поступательное движение	249
§ 65. Вращательное движение . ,	252
§ 66. Траектории, скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела	257
§ 67. Частные случаи вращательного движения твердого тела	262
§ 68. Передачи вращательного движения	267
Глава XV. Сложное движение точки	279
§ 69. Абсолютное, относительное и переносное движения точки	279
§ 70. Теорема сложения скоростей ,	282
§ 71. Разложение скорости точки на составляющие	287
Глава XVI. Сложное движение твердого тела	289
§ 72. Понятие сложного движения тела	289
§ 73. Понятие плоскопараллельного движения тела	289
§ 74. Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное. Зависимость между скоростями различных точек этой фигуры	293
§ 75*. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры	298
§ 76. Мгновенный центр скоростей фигуры	299
§ 77. Распределение скоростей точек плоской фигуры	303

§ 78*. Сложение вращений вокруг параллельных осей . . .	307
§ 79*. Угловая скорость как вектор. Аналогия между сложением угловых скоростей и сложением сил	315
§ 80. Планетарные и дифференциальные передачи	317

Раздел III

ДИНАМИКА

Глава XVII. Введение в динамику	322
§ 81. Предмет динамики и ее две основные задачи . . .	322
§ 82. Основные законы динамики	324
§ 83. Системы единиц	331
Глава XVIII. Основы кинестатики	335
§ 84. Принцип Даламбера	335
§ 85. Понятие силы инерции	337
§ 86. Силы инерции при криволинейном движении точки	338
Глава XIX. Работа и мощность силы	346
§ 87. Работа постоянной силы на прямолинейном пути . .	346
§ 88. Работа переменной силы на криволинейном пути. Графическое изображение работы	349
§ 89. Теорема о работе равнодействующей	353
§ 90. Работа силы тяжести	354
§ 91*. Работа силы упругости	357
§ 92. Мощность. Коэффициент полезного действия . . .	360
§ 93. Работа и мощность силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси	363
Глава XX. Общие теоремы динамики точки	368
§ 94. Количество движения и импульс силы	368
§ 95. Теорема об изменении количества движения материальной точки	369
§ 96. Потенциальная и кинетическая энергия	374
§ 97. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки	376
Глава XXI. Элементы динамики системы	383
§ 98. Внешние и внутренние силы системы	383
§ 99*. Закон сохранения количества движения системы	385

§ 100*. Центр масс системы. Теорема о движении центра масс системы	388
§ 101. Основное уравнение динамики для вращательного движения твердого тела	395
§ 102. Момент инерции тела	399
§ 103*. Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей	402
§ 104*. Моменты инерции некоторых однородных тел простейшей геометрической формы	403
§ 105. Теорема об изменении кинетической энергии системы	407
§ 106. Кинетическая энергия твердого тела	408

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕСЯТОМУ ИЗДАНИЮ

По сравнению с девятым изданием учебника (вышедшим в 1972 году) в десятое его издание внесен ряд изменений.

В соответствии с окончательной редакцией проекта государственного стандарта «Единицы физических величин», в десятом издании учебника принята система СИ, вводимая в настоящее время в СССР и в целом ряде других стран как обязательная. Это потребовало внести изменения во все приводимые в учебнике примеры и задачи. В полное соответствие с окончательной редакцией проекта ГОСТа приведены обозначения применяемых единиц. Вместе с тем, поскольку на практике некоторое время еще придется встречаться с так называемой «технической» системой единиц, автор счел необходимым дать в учебнике сведения и об этой системе. При установлении производных единиц в соответствующих местах динамики дается их выражение как в системе СИ, так и в технической системе и находится соотношение между ними для перевода единиц технической системы в единицы в системе СИ.

Редакционные изменения и уточнения внесены во многие параграфы курса. Некоторые параграфы написаны заново.

За помощь в подготовке книги к настоящему изданию автор выражает глубокую признательность рецензенту А. И. Аркуше и ассистенту Л. П. Чупковой.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

В учебнике, как и в предыдущих изданиях, уделено большое внимание истолкованию основных понятий и положений теоретической механики и их связи с реальной действительностью и технической практикой. Правильному усвоению и пониманию предмета учащимися, предотвращению возникновения у них ложных, искаженных представлений служит также большое число имеющихся в книге примеров, замечаний и сносок.

В учебнике по-прежнему отводится значительное место развитию у учащихся умения и навыков применять изучаемые положения механики к решению конкретных вопросов и задач. Помимо общих методических указаний, этой цели служат 118 подробно решенных типовых задач, занимающих около 25% объема книги.

Учебник полностью охватывает все вопросы общей, обязательной для всех специальностей, части программы курса теоретической механики для машиностроительных техникумов. Помимо этого, в нем дается изложение и ряда вопросов, выходящих за рамки общей части программы, но важных для тех или иных специальностей. Параграфы и пункты учебника, не являющиеся общеобязательными и составляющие около 15% объема книги, отмечены звездочками. Они могут быть опущены без ущерба для понимания всего остального материала.

Все определения и выводы выделены в тексте курсивом, с тем чтобы фиксировать на них внимание учащихся, после того, конечно, как ими будет полностью усвоено содержание излагаемого вопроса.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предмет и метод теоретической механики

Движение является способом существования материи, ее основным неотъемлемым свойством.

Под движением в общем смысле понимается не только перемещение тел в пространстве, но и тепловые, химические, электромагнитные и любые другие изменения и процессы, включая наше сознание и мысль.

Механика изучает наиболее простую и легко наблюдаемую форму движения — механическое движение.

Механическим движением называется происходящее с течением времени изменение положения материальных тел относительно друг друга, а также изменение относительного положения частиц одного и того же материального тела, т. е. его деформация.

Нельзя, конечно, все многообразие явлений природы свести только к механическому движению и объяснить их на основании положений одной механики. Механическое движение никоим образом не исчерпывает существования различных форм движения, но оно всегда присутствует в каждой из них и должно быть исследовано раньше всего остального.

В связи с колоссальным развитием науки и техники стало невозможным в одной дисциплине сосредоточить изучение множества вопросов, связанных с механическим движением различного рода материальных тел. Современная механика представляет собой целый комплекс общих и специальных технических дисциплин, посвященных исследованию движения отдельных тел и их систем, проектированию и расчету различных сооружений, механизмов и машин и т. д.

Материальные тела, с которыми имеют дело в этих дисциплинах, весьма различны, но движение их обладает

многими свойствами, не зависящими от физических свойств самих движущихся тел. Так, например, можно говорить о скоростях точек тела независимо от того, что именно представляет собой это тело: частицу жидкости или газа, поршень, пулю или космический корабль. Можно говорить о вращении твердого тела также независимо от того, чем оно является: колесом или планетой.

Эти общие свойства механического движения материальных тел и изучаются в теоретической механике.

Теоретической механикой называется наука, изучающая общие законы механического движения материальных тел и устанавливающая общие приемы и методы решения вопросов, связанных с этим движением.

Для того чтобы установить законы движения, общие для всех материальных тел, теоретическая механика прибегает к приему схематизации явлений, т. е. к выделению главного, от чего эти явления существенным образом зависят, и отбрасыванию второстепенных обстоятельств, несущественных в рассматриваемых условиях. Поэтому в теоретической механике рассматривается движение не тех физических тел, которые реально существуют в природе, а некоторых абстрактных моделей, отражающих только определенные общие свойства реальных физических тел. К числу таких моделей относятся материальная точка и абсолютно твердое тело, движение которых только и рассматривается в общем курсе теоретической механики.

Все материальные тела занимают определенную часть пространства, т. е. имеют определенные размеры. Отдельные части этих тел могут совершать, вообще говоря, неодинаковое движение. Так, например, точки шкива, отстоящие на разных расстояниях от его оси, движутся по окружностям разных радиусов и с разными скоростями. Но чем меньше размеры тела, тем меньше будут отличаться между собой движения его различных частей. Абстрактно можно представить себе и бесконечно малое материальное тело.

Материальное тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи, называется материальной точкой. За материальную точку в теоретической механике принимается не только мельчайшая частица тела. Иногда за материальные точки можно принять и тела весьма больших размеров, если только эти размеры не играют существенной роли в данном ис-

следовании. Так, например, за материальную точку можно принять Землю при изучении ее движения вокруг Солнца. Вследствие малости размеров Земли сравнительно с ее расстоянием до Солнца можно считать, что все частицы Земли проходят в этом движении одинаковые расстояния. За материальную точку можно принять, как мы увидим далее, также любое материальное тело в случае его поступательного движения, т. е. такого движения, при котором все его частицы движутся совершенно одинаково.

Все реальные физические тела под влиянием внешних воздействий деформируются. Однако для обеспечения прочности и надежности работы сооружений и машин так подбирают материал и размеры их частей, чтобы возникающие в них деформации при данных нагрузках были весьма малыми. При исследовании многих вопросов этими незначительными деформациями можно пренебречь и считать расстояния между частицами данного тела неизменными. Таким образом, мы приходим к понятию так называемого абсолютно твердого тела.

Абсолютно твердым называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается неизменным.

В природе не существует ни материальных точек, ни абсолютно твердых тел. Все это лишь абстракции, не отражающие, конечно, полностью всех свойств конкретных физических тел. Но последнее и не обязательно, если только те свойства их, которые принятая абстракция не отражает, не сказываются сколько-нибудь заметно на характере изучаемого движения.

Если бы мы пытались всякий раз полностью учесть все свойства конкретного реального тела, то задача настолько бы усложнилась, что практически ее невозможно было бы решить. Установив же в теоретической механике из рассмотрения движений материальной точки и абсолютно твердых тел общие законы движения, мы можем затем применять их к конкретным физическим телам.

Лишь отвлекаясь при наблюдении от всего частного, индивидуального, свойственного единичным предметам и явлениям, мы имеем возможность путем обобщения полученных результатов установить общие закономерности, в частности общие законы механики. Так, например, Галилей, исходя из отдельных наблюдений над

движением падающих тел и обобщая найденные результаты, установил общий закон движения для всех тел, падающих в пустоте.

Это, как указывал В. И. Ленин, есть общий путь развития всякой истинной науки: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности» (Ленин, *Философские тетради*, 1947, стр. 146—147).

Упрощенная схема, которой мы заменяем в теоретической механике реальное физическое тело, зависит не только от его свойств, но и от характера тех вопросов, на которые мы хотим получить ответ. Так, например, при изучении движения Земли вокруг Солнца можно принять, как мы говорили, Землю за материальную точку, но при изучении вращения Земли вокруг ее оси уже нельзя принимать Землю за материальную точку, так как частицы Земли, находящиеся на разных расстояниях от оси, проходят в своем движении разные расстояния.

Курс теоретической механики принято делить на три основных раздела: статику, кинематику и динамику. *В статике изучаются правила сложения сил и условия равновесия твердых тел. В кинематике изучаются движения тел лишь с геометрической стороны, вне зависимости от действующих на эти тела сил. И наконец, в динамике изучаются зависимости между движением материальных тел и действующими на них силами.*

Теоретическая механика не только позволяет объяснить ряд важных явлений в окружающем нас мире, но и служит научным фундаментом для многих технических дисциплин. Ее методами и приемами пользуются при всех технических расчетах, связанных с проектированием различных сооружений и машин и их эксплуатации. Роль и значение теоретической механики для техники непрерывно возрастают. Сложнейшие технические проблемы, постоянно возникающие в связи с гигантским развитием техники, организацией и развитием все новых и новых видов производств и новых технических средств, нельзя решать на основе одних опытных данных, на основе одной практики. Требуется научное предвидение и строгий предварительный расчет, основанные на глубоком знании теории, причем в первую очередь на знании законов и методов теоретической ме-

ханики. Таким образом, помимо важного общеобразовательного значения, изучение теоретической механики играет огромную роль в формировании будущего техника как специалиста. Чем лучше и глубже будут усвоены учащимися основные положения теоретической механики, чем сознательней и свободней они будут пользоваться ее методами, тем легче будет для них переход к продуктивному изучению специальных технических дисциплин.

§ 2 *. Краткий исторический очерк

Механика, наряду с астрономией и математикой, является одной из самых древних наук. Грандиозные египетские пирамиды, сооруженные за несколько тысяч лет до нашей эры, и остатки еще более древних сооружений Китая, Индии и других стран наглядно свидетельствуют о том, что еще в глубокой древности применялись такие механические приспособления, как рычаги, катки, блоки и другие средства, облегчающие передвижение тяжестей. Правда, на этом этапе общие законы механики не могли быть открыты. Как наука механика возникла с того времени, когда появились первые сочинения, теоретически обобщившие накопленный опытом материал.

В процессе развития способов общественного производства и развития техники механика как наука претерпевала, конечно, и принципиальные изменения в своем содержании.

Термин «механика»¹⁾ был впервые введен великим греческим философом древности Аристотелем (384—322 гг. до н. э.), но его сочинения, излагающие учение о движении и силах, наряду с отдельными правильными положениями содержали много неверного и не носили научный характер.

Основоположником механики как точной науки, главным образом статики, следует считать величайшего математика и механика древней Греции Архимеда (287—212 гг. до н. э.). Архимеду принадлежит ряд крупнейших открытий в математике и механике. В частности, он дал точное решение задачи о рычаге и создал учение о центре тяжести. Архимеду принадлежит открытие закона, носящего его имя, о давлении жидкости

¹⁾ От греческого слова «механе» — ухищрение, машина.

на погруженное в нее тело. Разработанные им методы измерения площадей поверхностей и объемов различных тел через два тысячелетия развились в интегральное исчисление.

Архимед совмещал гениальные теоретические открытия с замечательными изобретениями. Некоторые из них не потеряли своего значения и в наше время.

В средние века развитие механики, как и развитие других естественных наук, приостановилось, что объясняется застойными формами феодального производства.

Расцвет механики начинается с эпохи Возрождения, с конца XV — начала XVI века, эпохи развития торгового капитала. Развитие торговли повлекло за собой развитие дорожного строительства, судостроения, мореплавания, промышленности и военного дела. Все это послужило стимулом для быстрого развития науки вообще и механики в частности.

Созданное великим польским астрономом Николаем Коперником (1473—1543) учение о гелиоцентрической системе мира, по которому в центре мира находится Солнце, а Земля и другие планеты движутся вокруг него и вокруг своих осей, произвело революционный переворот в научном мировоззрении. Оно означало решительный разрыв с религиозными представлениями о Земле как о центре мира и послужило основой для развития новой науки — небесной механики и для развития важнейшего раздела теоретической механики — динамики.

До этого времени все открытия в механике касались главным образом той ее части, в которой изучаются законы равновесия — статики.

Зарождение динамики связано с именем страстного сторонника учения Коперника, великого итальянского ученого Галилео Галилея (1564—1642). Галилей первый доказал, что под действием постоянной силы тело будет двигаться равноускоренно, а не равномерно, как думали со времен Аристотеля, и сформулировал закон инерции. Он экспериментально установил закон падения тел в пустоте, решил задачу о движении тела, брошенного под углом к горизонту, и др. Исследования Галилея по выяснению зависимости между размерами элементов конструкций и нагрузками, которые они могут выдерживать, послужили началом развития новой науки — сопротивления материалов.

Завершая развитие идей Галилея и его последователей, великий английский ученый Исаак Ньютон (1643—1727) установил основные законы классической механики¹⁾. Ньютон ввел понятие о массе и дал точную формулировку второму закону, служащему основанием всей динамики. Ему же полностью принадлежит открытие двух важнейших законов механики: закона равенства действия и противодействия и закона всемирного тяготения.

Кроме установления основных законов механики, Ньютон разрешил большое число конкретных задач астрономии и механики. Ньютон был одним из создателей дифференциального и интегрального исчисления, оказавших огромное влияние на дальнейшее развитие механики. Появление дифференциального и интегрального исчисления, т. е. математического анализа, способствовало быстрому развитию механики в XVIII веке.

Значительную роль в развитии аналитических методов в механике сыграли труды выдающихся французских ученых Ж. Л. Даламбера (1717—1783) и Ж. Л. Лагранжа (1736—1813).

Крупнейший вклад в развитие механики внесли русские и советские ученые.

Член Российской Академии наук, великий математик и механик Леонард Эйлер (1707—1783), швейцарец по происхождению, нашедший в России свою вторую родину и проживший в ней всю свою творческую жизнь, написал свыше 800 научных работ по математике, астрономии, динамике твердого тела, гидромеханике и сопротивлению материалов.

Знаменитый русский математик и механик академик П. Л. Чебышев (1821—1894) создал, в частности, новые методы синтеза механизмов и положил начало всемирно известной русской школе теории механизмов и машин.

Великий русский ученый Н. Е. Жуковский (1847—1921) заложил основы аэродинамики. Одним из виднейших представителей созданной Н. Е. Жуковским замечательной русской школы гидро- и аэромеханики является С. А. Чаплыгин (1869—1942). С. А. Чаплыгин разработал ряд вопросов аэродинамики, имеющих огромное значение для современной скоростной авиации.

¹⁾ *Классической механикой* называется теоретическая механика, построенная на трех основных законах Галилея — Ньютона.

Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным выполнен целый ряд важнейших работ и в других областях механики.

Выдающемуся ученому И. В. Мещерскому (1859—1935) принадлежит приоритет в создании новой важной области теоретической механики — механики тел переменной массы. Главное применение механика тел переменной массы находит в исследовании движения ракет.

Основателем современной теории полета ракет (ракетодинамики) и теории межпланетных сообщений является замечательный русский ученый, добившийся разносторонних и глубоких знаний исключительно в результате упорного самостоятельного труда, К. Э. Циолковский (1857—1935).

В настоящее время механика развивается трудами многих советских и зарубежных ученых. Ярким примером достижений советских ученых в различных областях механики являются наши успехи в освоении космоса.

§ 3. Основные законы классической механики

Классической механикой называется механика, построенная на трех основных законах Галилея — Ньютона.

Эти законы представляют собой результат обобщения выводов из многочисленных опытов и многовековых наблюдений над движением материальных тел.

Практика подтверждает правильность следствий, вытекающих из этих законов. Построенные на основании законов классической механики сооружения прочны, машины работают, приборы действуют, корабли плавают, самолеты летают. Это служит неоспоримым доказательством правильности тех положений и законов механики, которые применялись при расчетах, доказательством того, что законы механики отражают объективные, не зависящие от сознания людей, процессы природы и, следовательно, сами являются объективными законами.

Однако под законами механики нельзя понимать какие-то непреложные, «вечные» истины. В силу несовершенства человеческого опыта они являются лишь только определенным приближением к абсолютной истине. Положение диалектического материализма о том,

что всякая настоящая наука содержит истины, лишь приближающиеся в соответствии с общим прогрессом к абсолютному познанию, остается, конечно, правильным и по отношению к механике. Успехи физики в начале нашего века показали, что законы классической механики не имеют неоспоримой ранее всеобщности и неприменимы к движению микрочастиц и к движению тел со скоростями, близкими к скорости света. Это привело к появлению новой, основанной на теории относительности¹⁾, механики.

Однако для целей обычной практики классическая механика (изучение основ которой и составляет содержание данного курса) полностью сохранила свое значение.

Мы ограничимся пока рассмотрением двух (первого и третьего) основных законов механики и только в мере, необходимой для усвоения понятия о силе и изучения статики. В последнем разделе курса — динамике мы дополним рассмотрение этих законов и подробно остановимся на втором основном законе механики.

Первый закон (закон инерции). *Всякое тело²⁾ сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействия со стороны других тел не заставят его изменить это состояние.*

Тот факт, что тело при отсутствии действия на него со стороны других тел сохраняет состояние равномерного прямолинейного движения, противоречит, на первый взгляд, повседневному опыту и был открыт лишь в XVII веке Галилеем. Мы наблюдаем, что всякое тело, как будто бы предоставленное самому себе, постепенно уменьшает свою скорость и наконец останавливается. Однако если глубже присмотреться к этому явлению, то станет ясным, что это кажущееся противоречие закону объясняется влиянием на движение данного тела других тел: трением тела о поверхность, по которой оно движется, сопротивлением воздуха и т. п. Они-то и замедляют движение тела. Если принять меры к уменьшению

¹⁾ Созданная великим физиком А. Эйнштейном (1879—1955) знаменитая теория относительности не отвергает классическую механику, а содержит ее в себе в качестве частного случая, справедливого для макротел, движущихся со скоростями, значительно меньшими скорости света.

²⁾ Под словом «тело» здесь нужно понимать материальную точку.

этих влияний (сопротивлений движению), то замедление будет меньшим и движение будет больше приближаться к равномерному. Отсюда можно заключить, что если бы нам удалось совершенно устранить все сопротивления движению тела, то скорость его не изменялась бы ни по направлению (следовательно, движение было бы прямолинейным), ни по численному значению (следовательно, движение было бы равномерным).

Для того чтобы поставить тело в такие условия, его нужно было бы изолировать, т. е. так удалить от всех остальных материальных тел, чтобы на его движении не сказывалось их влияние.

Взаимодействия материальных тел, в результате которых происходит изменение¹⁾ скорости этих тел или их деформация, называются механическими.

Мера механического действия на данное тело со стороны других тел, характеризующая величину и направление этого действия, называется силой, приложенной к данному телу.

Практически нельзя, конечно, совершенно изолировать тело от воздействия на него окружающих тел, т. е. от действия сил. Никаким способом нельзя полностью устранить силы сопротивления движению тела. Поэтому практически для поддержания движения тела к нему нужно приложить силу, направленную в сторону, противоположную силе сопротивления. Если эта сила будет меньше силы сопротивления, то движение замедлится и тело остановится. Если она будет больше силы сопротивления, то скорость тела увеличится. Если же численное значение этой силы будет равно численному значению силы сопротивления (а направление противоположно), то скорость тела сохранится неизменной. В этом случае говорят, что приложенные к телу силы взаимно уравновешиваются, или, что все равно, находятся в равновесии. Такие силы, очевидно, не влияют на движение тела, и, следовательно, их можно не учитывать при определении движения тела.

Из сказанного можно сделать следующее, ценное для практических приложений, заключение: *всякое тело,*

¹⁾ Только по численному значению, только по направлению или по численному значению и по направлению. Во всех этих случаях мы говорим, что скорость изменяется.

находящееся под действием взаимно уравновешенных сил, сохраняет свою скорость неизменной (а частности, сохраняет состояние покоя).

Подобное тело¹⁾ можно рассматривать как тело, к которому силы не приложены вообще.

Справедливо и обратное положение. *Если какое-либо тело движется с неизменной скоростью, то все действующие на него силы взаимно уравновешиваются.* Напротив, в случае изменения скорости тела можно утверждать, что действующие на него силы не находятся в равновесии.

Сохранение телом состояния своего движения (численного значения и направления своей скорости и, в частности, состояния покоя) неизменным при отсутствии действия на него сил (или при их равновесии) называется инерцией тела. Отсюда и закон, устанавливающий это свойство всякого материального тела, получил название закона инерции.

В древности считали покой естественным состоянием материи, полагая, что всякое тело, будучи выведено из состояния покоя, стремится к нему возвратиться. В переводе с латинского слово «инерция» означает косность, бездействие. Ясно, что в механике в настоящее время это слово надо понимать иначе. Смысл понятия «инерция тела» простой и очевидный: движение тела не может изменяться «само по себе», без действия сил. Но достаточно приложить к любому телу любую, даже ничтожно малую силу²⁾, как оно тотчас же начнет изменять свою скорость, и это изменение будет происходить все время, пока на тело действует сила.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). *Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по численному значению и направлены по одной прямой в противоположные стороны.*

Все тела в природе находятся во взаимной связи и, следовательно, воздействуют друг на друга.

Согласно третьему закону, действия тел друг на друга не бывают односторонними. Так, если тело притягивается к Земле, то оно само с такой же силой

¹⁾ Имеется в виду, как и обычно в теоретической механике, абсолютно твердое, т. е. недеформируемое, тело.

²⁾ Под приложенной к телу силой здесь надо понимать «избыток» движущей силы над силами сопротивления.

притягивает к себе Землю. Если тело испытывает сопротивление среды, то оно само с такой же силой действует на эту среду, вызывая в ней перемещение ее частиц. При трении тела о плоскость одинаково трутся обе соприкасающиеся поверхности. Называя одну какую-либо из этих сил действием, другую мы считаем противодействием.

Нужно твердо усвоить, что в природе не бывает одностороннего действия сил, а есть только взаимодействие тел. Все силы — силы парные. Поэтому, если мы и употребляем часто такое выражение, как «к телу приложена сила», то его надо понимать в том смысле, что с данной силой действует на рассматриваемое тело некоторое другое тело. При этом на последнее в свою очередь непременно действует данное тело с силой, равной первой по численному значению и противоположной по направлению. Интересуясь движением одного какого-либо тела, мы лишь оставляем в стороне вопрос о его обратном действии на другие тела, служащие источником приложенных к данному телу сил.

Силы взаимодействия двух тел, хотя они и равны по численному значению и направлены по одной прямой в противоположные стороны, *не уравнивают друг друга*, так как они приложены не к одному, а к двум различным телам.

Если бы действие и противодействие уравнивались, то никогда нельзя было бы давлением одного тела привести в движение другое, что, очевидно, неверно.

Равенство «действия» и «противодействия», о котором говорится в третьем законе, нельзя смешивать с равенством их результатов. Результат действия какой-либо силы на тело определяется не только ее величиной, но и совокупностью целого ряда других обстоятельств: массой тела, его упругими свойствами, наличием других сил, действующих на данное тело, и т. д. При столкновении, скажем, океанского парохода со шлюпкой действия их друг на друга будут совершенно одинаковыми, результат же этих действий, конечно, будет различным.

§ 4. Понятие силы

Понятие силы возникает из повседневного опыта. С первых же шагов своей жизни человек приобретает ощущение мускульного усилия, необходимого для того,

чтобы передвинуть какое-либо тело с одного места на другое, чтобы поднять его, изменить его скорость и т. п. По аналогии с этим ощущением мы и называем силой меру такого действия одного тела на другое, в результате которого тело изменяет свое механическое состояние.

В окружающей нас действительности мы встречаемся с различными силами: силой тяжести, силой притяжения и отталкивания наэлектризованных и намагниченных тел, силой трения, силой давления одного тела на другое и т. д. Вопрос, почему возникают те или иные силы, является предметом изучения различных отделов физики, в теоретической же механике интересуются лишь их механическим эффектом, т. е. производимым силами изменением механического состояния данного тела.

Если изменение механического состояния тела выражается в изменении его скорости, то мы имеем, как иногда говорят, динамическое проявление силы.

Так, например, под влиянием силы тяжести тело, брошенное вертикально вверх, постепенно уменьшает свою скорость и, наоборот, падающее тело увеличивает свою скорость. Если тело брошено под углом к горизонту, то под действием той же силы скорость тела изменяется и по численному значению и по направлению (тело в пустоте движется по параболе).

Если же изменение механического состояния тела выражается не в изменении его скорости, а в деформации, то мы имеем, как говорят, статическое проявление силы.

Так, например, сила тяжести тела не изменяет его движения, если тело лежит на горизонтальном столе. В этом случае тело взаимодействует еще и со столом и сила тяжести тела, тянущая его вниз, уравновешивается силой сопротивления стола¹⁾.

Как известно из опыта, *действие силы на тело определяется следующими тремя элементами: 1) точкой приложения силы, 2) направлением силы и 3) численным значением (модулем) силы.*

¹⁾ Заметим, что уравновешиваются здесь сила тяжести тела и сила сопротивления стола, приложенные к одному и тому же телу, а не сила давления тела на стол («действие») и сила сопротивления стола («противодействие»), приложенные к разным телам.

Точкой приложения силы называется та материальная частица тела, на которую непосредственно действует сила.

Заметим, что понятие точки приложения силы условно, так как приложить силу в одной геометрической точке (не имеющей размеров) практически невозможно. Силы, которые мы в задачах механики рассматриваем как силы, сосредоточенные в одной точке, по существу представляют собой равнодействующую некоторой совокупности сил, действующих на все точки данной части поверхности или данного объема тела¹⁾).

Направление силы есть направление того прямолинейного движения, которое данная сила сообщила бы точке ее приложения, если бы эта частица тела была свободна и находилась до этого в покое.

Так, например, сила тяжести тела направлена вертикально вниз, ибо по этому направлению падают первоначально покоившиеся тела при отсутствии действия на них других сил.

Прямая, по которой направлена сила, называется линией действия силы.

Численное значение (модуль) силы находится путем ее сравнения с некоторой другой силой, принимаемой за единицу.

Приборы, служащие для статического сравнения и измерения сил, называются динамометрами (силомерами).

Примером простейшего динамометра служат обыкновенные пружинные весы. Принцип действия такого динамометра основан на том, что до известных пределов деформация (растяжение) пружины пропорциональна силе, ее вызывающей, и исчезает по прекращении действия силы.

За единицу силы в Международной системе единиц²⁾, вводимой в настоящее время в СССР в качестве обязательной, принимается сила, называемая ньютоном (сокращенно — Н).

Для перевода, пока еще часто встречающегося на практике измерения силы в килограммах силы (сокращенно — кгс), заметим, что $1 \text{ кгс} \approx 9,81 \text{ Н}$. Нетрудно

¹⁾ Например, под силой тяжести тела понимается равнодействующая сил тяжести всех его частиц.

²⁾ Сокращенно «система СИ», что значит — система интернациональная.

заметить, что сила в 1 Н примерно в 10 раз меньше силы в 1 кгс¹⁾).

Выбор международной единицы силы основан на так называемом динамическом определении силы, почему и обоснование этого выбора мы дадим в динамике (§ 83).

§ 5. Скалярные и векторные величины

Различают два ряда физических величин, существенно отличающихся друг от друга.

Одни величины, как температура, время, масса, плотность, площадь, объем и т. д., вполне характеризуются — при выбранной единице меры — числами. Чтобы характеризовать, скажем, в некоторый момент температуру воздуха в данном месте, достаточно измерить ее, например, в градусах Цельсия. Полученное число (положительное или отрицательное) дает значение температуры.

Величины, вполне определяемые одним своим численным значением, называются скалярными величинами или просто скалярами.

Для характеристики же других величин указания одного их численного значения недостаточно, нужно знать еще и их направление.

Величины, определяемые не только своим численным значением, но и направлением в пространстве, называются векторными величинами или просто векторами.

К векторам относится не только сила, но и ряд других механических величин: скорость, ускорение и т. д.

Всякая векторная величина графически изображается прямолинейным отрезком AB (рис. 1), длина которого в выбранном масштабе соответствует численному значению вектора, а направление совпадает с направлением вектора. На чертеже это направление указывается стрелкой.

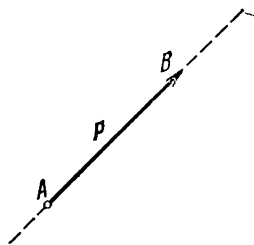


Рис. 1.

¹⁾ 1 кгс — вес принятого в метрической системе мер международного прототипа массы, в том месте Земли, где ускорение свободно падающего тела $g = 9,80665 \approx 9,81$ м/с².

Численная величина вектора называется его модулем. Модуль вектора есть положительная скалярная величина.

Точки A и B отрезка AB (рис. 1), изображающего вектор, называются соответственно началом и концом вектора AB .

Так как действия над векторами существенно отличаются от действий над скалярными величинами, то для отличия мы будем векторные величины обозначать одной жирной буквой, например P . Иногда вектор обозначается двумя светлыми буквами со стрелкой наверху, например \overrightarrow{AB} . При этом первая буква обозначает начало вектора, а вторая — его конец.

Модуль вектора мы будем обозначать той же буквой, что и вектор, но светлой или теми же двумя буквами, но без стрелки сверху. Так, например, буквой P мы будем обозначать модуль вектора P , а буквами AB — модуль вектора \overrightarrow{AB} .

Различают между собой три типа векторных величин (векторов).

1. Векторы связанные (приложенные) — векторы, начало которых связано с определенной точкой пространства, т. е. векторы, имеющие определенную точку приложения.

2. Векторы скользящие — векторы, за начало которых может быть принята любая точка, лежащая на некоторой прямой, имеющей направление данного вектора (линии его действия). Таким образом, скользящие векторы можно переносить вдоль их линий действия.

3. Векторы свободные — векторы, за начало которых может быть принята любая точка пространства, т. е. векторы, не связанные с определенной линией действия.

Два вектора называются равными, если они имеют одинаковые модули и одинаковое направление (т. е. если они параллельны и направлены в одну сторону). Так, например, векторы a и b (рис. 2) — равные векторы. Векторы же a и c ,

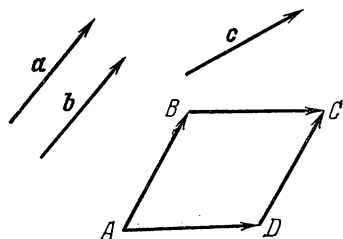


Рис. 2.

хотя они и имеют одинаковые модули, не равны, так как направления их различны.

В ромбе $ABCD$ (рис. 2) $\vec{AB} = \vec{DC}$ и $\vec{BC} = \vec{AD}$, но вектор \vec{AB} не равен векторам \vec{AD} и \vec{BC} .

Равные векторы обычно не различают между собой и обозначают одинаково.

Важно заметить, что силу нельзя рассматривать как свободный вектор, ибо точку приложения силы нельзя выбирать произвольно.

Над силами, так же как и над другими векторами, можно производить различного рода математические операции. Правила этих операций излагаются в тех местах нашего курса, где это будет необходимо для понимания соответствующих положений механики, и лишь в требуемом для этого объеме.

В заключение данного параграфа скажем еще несколько слов о масштабе вектора.

Всякую векторную величину, как говорилось выше, принято графически изображать в виде прямолинейного отрезка определенной длины и определенного направления. Длина этого отрезка должна в каком-то масштабе соответствовать численному значению (модулю) вектора, природа и размерность которого могут быть любыми. Поэтому обычный чертежный масштаб для изображения векторов, вообще говоря, неприменим.

Если какая-нибудь векторная величина Q изображается на чертеже отрезком длины l , то масштабом μ этой величины будет

$$\mu = \frac{Q}{l}.$$

Из этой формулы следует, что размерность масштаба вектора получается делением размерности модуля (Q) вектора на размерность длины (l). Масштаб μ обычно снабжается индексом, указывающим, к какой величине он относится. Если, например, требуется графически изображать силу $P = 200$ Н отрезком длины $l = 10$ мм, то масштаб силы будет $\mu_P = 20$ Н/мм, для скорости $v = 20$ м/с, изображаемой отрезком $l = 10$ мм, масштабом будет $\mu_v = 2$ м/(с·мм) и т. п.

РАЗДЕЛ I

СТАТИКА

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ В СТАТИКУ

§ 6. Предмет и аксиомы статики

Статикой называется раздел теоретической механики, изучающий общие свойства сил и условия равновесия твердых тел, находящихся под действием приложенных к ним сил.

Под равновесием твердого тела в статике понимается состояние его покоя по отношению к системе координат, принимаемой за неподвижную. За такую систему в статике можно принять систему координат, жестко связанную с Землей.

В основании статики помимо первого и третьего основных законов классической механики лежит еще несколько подтверждаемых многовековой практикой положений, называемых аксиомами статики. Опираясь на них, логическим путем строятся все остальные положения статики. Условимся предварительно о следующих определениях.

1. *Совокупность сил, действующих на данное тело, называется системой сил. Силы, входящие в состав данной системы, называются составляющими этой системы.*

2. *Если система сил такова, что под ее действием свободное тело не изменяет своего движения или, в частности, продолжает оставаться в покое, то такая система сил называется уравновешенной системой. О силах такой системы говорят, что они находятся в равновесии.*

Под «свободным» телом принимается тело, не скрепленное с другими телами, т. е. тело, которому можно сообщить любое перемещение в пространстве.

3. Сила, которая, будучи присоединена к некоторой системе сил, действующих на тело, приводит систему к равновесию, называется уравнивающей данной системы сил. Очевидно, что в уравновешенной системе каждая из сил является уравнивающей по отношению ко всем остальным.

4. Две системы сил называются эквивалентными, если они оказывают одинаковое механическое действие на одно и то же свободное твердое тело.

5. Одна сила, эквивалентная данной системе сил, называется равнодействующей этой системы.

6. Силы, действующие на данное тело со стороны других тел, называются внешними силами. Силы взаимодействия между частицами данного тела называются внутренними силами.

Первая аксиома. Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Необходимо иметь в виду, что данная аксиома, как и все вообще положения статики, безоговорочно применима только к абсолютно твердому телу. При применении же ее к реальным деформируемым телам необходимо учитывать особенности сил и тел, к которым они приложены.

Если, например, мы приложим две равные по модулю и противоположные по направлению силы P_1 и P_2 к концам гибкой нити, то она будет находиться в равновесии

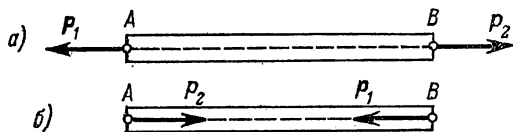


Рис. 3.

только при способе приложения этих сил, показанном на рис. 3, а (когда нить растягивается). При способе же приложения этих сил, показанном на рис. 3, б, нить сомнется и не будет находиться в равновесии. Если же вместо нити мы возьмем твердый стержень, то в обоих случаях, изображенных на рис. 3, он будет находиться в равновесии.

Вторая аксиома. *Не нарушая действия данной системы сил на абсолютно твердое тело, можно добавить к этой системе сил или исключить из нее любую уравновешенную систему сил.*

Другими словами, присоединяя к данной системе сил, действующих на твердое тело, любую уравновешенную систему сил, мы получаем систему, эквивалентную данной. Наоборот, если в состав данной системы входит несколько сил, образующих в отдельности уравновешенную группу, то можно отбросить такую группу сил. Оставшаяся система эквивалентна данной.

Следствие первое. *Всякую силу, приложенную в какой-либо точке абсолютно твердого тела, можно, не изменяя ее действия, переносить в любую другую точку, лежащую на линии действия этой силы.*

Доказательство. Пусть на тело действует сила P , приложенная в точке A (рис. 4). Возьмем на линии

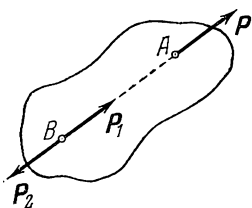


Рис. 4.

действия этой силы какую-нибудь произвольную точку B и приложим к ней две силы P_1 и P_2 равные по модулю силе P ($P = P_1 = P_2$) и действующие по одной с ней прямой AB в противоположные стороны. Силы P_1 и P_2 равны по модулю и направлены противоположно. По первой аксиоме статики они взаимно уравновешиваются; следовательно,

на основании второй аксиомы от их присоединения состояние абсолютно твердого тела не изменится. Но силы P и P_2 также взаимно уравновешиваются (на основании первой аксиомы), и их поэтому можно отбросить, не изменяя состояния абсолютно твердого тела. Остается одна сила P_1 , равная данной силе P и лежащая на линии ее действия. Так как точка приложения силы P_1 (точка B) была выбрана на линии действия данной силы произвольно, то следствие доказано.

Мы видим, что для абсолютно твердого тела точка приложения перестает быть существенным элементом силы, ее заменяет линия действия силы. Вспоминая сказанное о типах векторов (стр. 26), можно заметить, что сила, приложенная к абсолютно твердому телу, является скользящим вектором.

Таким образом, действие силы на абсолютно твердое тело определяется следующими элементами: 1) моду-

лем, 2) линией действия и 3) направлением силы по линии ее действия. Конечно, в каждом отдельном случае можно приписать силе и некоторую точку приложения, но эта точка всегда может быть заменена другой точкой, лежащей на линии действия силы.

Необходимо заметить, что присоединение и отбрасывание уравновешенных сил, так же как и перенос силы вдоль линии ее действия, изменяют картину распределения внутренних сил в теле. Так, например, изменение расположения сил, приложенных к концам стержня, изображенного на рис. 3, *а*, в расположение, изображенное на рис. 3, *б*, может быть получено путем переноса сил P_1 и P_2 вдоль их линий действия в соответственно противоположные концы стержня. Ясно, что такой перенос в случае деформируемого стержня существенно изменяет его внутреннее состояние, так как в первом случае стержень растягивается, а во втором — сжимается.

В применении к реальным физическим телам данными приемами можно пользоваться только тогда, когда рассматривается лишь внешнее действие сил на данное тело, т. е. когда определяются лишь необходимые условия равновесия этого тела. При рассмотрении этих условий мы принимаем тело за абсолютно твердое и внутренние силы можно вообще не принимать во внимание. В самом деле, по закону равенства действия и противодействия любые две частицы тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, в своей совокупности эти силы всегда представляют уравновешенную систему и в случае абсолютно твердого тела их можно отбросить.

Так как в статике рассматривается равновесие именно абсолютно твердых тел, то в дальнейшем под силами, действующими на тело, мы всегда будем понимать только внешние силы (если не будет сделано специальной оговорки).

Следствие второе. Равнодействующая и уравновешивающая силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Доказательство. Положим, что сила R есть равнодействующая сил P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 5). Приложим по линии действия равнодействующей равную ей по модулю, но направленную в противоположную сторону

силу R' . Как силы, равные по модулю и противоположно направленные, силы R_P и R' взаимно уравновешиваются. Не нарушая состояния тела, мы можем заменить равнодействующую R_P ее составляющими, т. е.

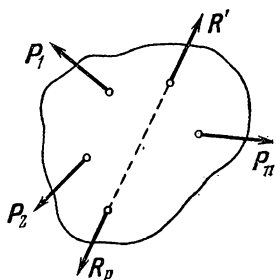


Рис. 5.

эквивалентной ей системой сил P_1, P_2, \dots, P_n . А так как сила R' уравновешивает равнодействующую R_P , то она будет являться уравновешивающей и для системы сил P_1, P_2, \dots, P_n .

Так как по условию сила R' равна по модулю и направлена противоположно силе R_P , то требуемое положение доказано. Из данного следствия вытекает, что нахождение силы, уравновешивающей данную систему сил, можно свести к определению равнодействующей этой системы.

Третья аксиома. *Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и изображается диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, как на сторонах.*

Параллелограмм, построенный на данных силах, называется *параллелограммом сил*, а сам способ нахождения равнодействующей путем построения параллелограмма называется *правилом параллелограмма*.

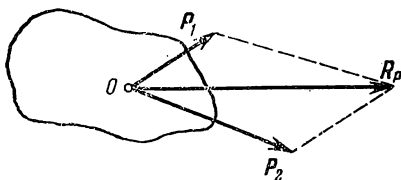


Рис. 6.

Сложение сил, как и других векторных величин, по правилу параллелограмма называют *геометрическим (векторным) сложением*.

Геометрическое сложение сил, как и сложение

любых векторов, обозначается обычным знаком сложения (+), стоящим между жирными буквами (или буквами со стрелками над ними), обозначающими силы.

Если обозначить через R_P равнодействующую двух сил P_1 и P_2 , приложенных к одной точке O тела (рис. 6), то на основании данной аксиомы имеем

$$R_P = P_1 + P_2.$$

Третья аксиома статики говорит о равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке. Если две силы приложены в различных точках тела, но линии их действия пересекаются, то, пользуясь следствием 1, мы можем перенести обе силы в точку пересечения их линий действия и затем сложить по правилу параллелограмма. Если линии действия сил пересекаются где-либо вне тела, то, перенося обе силы в их точку пересечения и определив равнодействующую, нужно затем перенести ее по линии действия в одну из точек тела¹⁾.

Четвертая аксиома (принцип отвердевания). *Если нетвердое тело находится в равновесии, то это равновесие не нарушится и в том случае, когда тело станет абсолютно твердым.*

Аксиома очевидна, так как превращение находящегося в равновесии нетвердого деформируемого тела в абсолютно твердое тело может только еще более ограничивать возможные движения тела, только еще более закреплять равновесие тела, а не нарушать его.

Принцип отвердевания позволяет применять к любому нетвердому телу и к любой изменяемой конструкции условия равновесия, устанавливаемые статикой для абсолютно твердого тела. Эти условия являются необходимыми условиями равновесия и для нетвердых тел, но не всегда достаточными.

Как мы уже говорили выше, для равновесия гибкой нити недостаточно того, чтобы приложенные к ее концам силы были равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны, нужно еще, чтобы они растягивали нить, а не сжимали.

Таким образом, учет деформаций, возникающих в реальном теле под действием приложенных к нему сил, лишь дополняет результаты, полученные в механике абсолютно твердого тела, но не уничтожает их.

§ 7. Связи и реакции связей

При решении большинства задач механики приходится иметь дело с *тёлами несвободными*, т. е. с такими,

¹⁾ Последнее может оказаться невозможным, если линия действия равнодействующей пройдет вне тела. Но и в этом случае мы можем какую-либо точку, лежащую на линии действия равнодействующей, связать (мысленно) неразрывным образом с телом и приписать ее за точку приложения равнодействующей.

которые соприкасаются или скреплены с другими телами, благодаря чему становятся невозможными те или иные перемещения данного тела.

Если тело несвободно, то говорят, что на него наложены связи. *Связями называются тела, ограничивающие свободу перемещения данного тела.*

Так, для тела, лежащего на столе, связью является стол, для вала, лежащего в подшипниках, связями являются подшипники, для лестницы, приставленной к стене, связями являются стена и пол.

Если под действием приложенных к нему сил тело будет давить на связь, то связь в свою очередь будет действовать на данное тело.

Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении, называется силой реакции (противодействия) этой связи.

По закону равенства действия и противодействия сила реакции связи равна по модулю силе давления на связь и направлена в сторону, противоположную этой силе, т. е. в сторону, противоположную тому направлению, в котором данная связь препятствует перемещению тела.

Все действующие на тело силы можно разделить на активные силы и силы реакции связей. *К активным силам относятся все силы, не являющиеся реакциями связей.*

В отличие от активных сил, сила реакции связи зависит как от других, действующих на данное тело сил, так и от движения тела и характера наложенных на него связей. Она существует лишь тогда, когда тело под действием приложенных к нему активных сил оказывает давление на данную связь. Если нет действия на связь, то не будет и противодействия связи (силы реакции связи).

Модуль силы реакции связи всегда заранее известен. Направление этой силы заранее известно в том случае, когда данная связь может препятствовать движению тела лишь в одном определенном направлении. В противных случаях направление силы реакции связи также заранее неизвестно и оно определяется только в результате решения соответствующей задачи.

Задачи на равновесие несвободных тел решаются в статике на основании следующего очевидного обстоятельства: *всякое несвободное тело можно рассматри-*

вать как свободное, если мысленно освободить его от связей и заменить их действие на тело силами реакций этих связей (принцип освобождаемости, или аксиома связей).

Пользуясь этим принципом, можно применять к несвободному телу условия равновесия, устанавливаемые в статике для свободного тела. *Нужно только в число сил, действующих на тело, обязательно включать и силы реакций отброшенных связей.*

Большинство технических задач статики как раз и заключается в определении сил реакций связей. Зная их, мы будем знать и силы давления на связи, т. е. будем иметь данные, необходимые для расчета на прочность соответствующих конструкций.

Рассмотрим, как определяется направление реакций некоторых основных типов связей.

1. Гладкая опорная поверхность

Гладкой называется поверхность, трением тела о которую можно пренебречь¹⁾. Так как гладкая опорная поверхность не препятствует скольжению по ней поверхности тела, то реакция R гладкой поверхности (рис. 7) направлена всегда по общей нормали²⁾ к поверхности тела и поверхности связи в их точке касания.

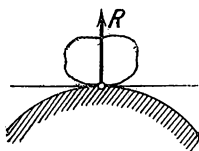


Рис. 7.

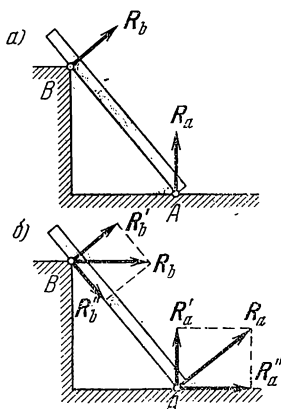


Рис. 8.

Если одна из соприкасающихся поверхностей имеет заострение (рис. 8), то реакция должна быть

¹⁾ Связи без трения относятся к так называемым *идеальным* связям. Рассмотрением таких связей мы пока и ограничимся.

²⁾ Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости, проведенный через точку касания.

направлена по нормали к другой. Например, к гладкому брусу AB (рис. 8, а), опирающемуся в точке A на пол и в точке B на столб, приложены реакции R_a пола и R_b столба, направленные так, как это изображено на рисунке. Если бы эти реакции были направлены иначе, например так, как изображено на рис. 8, б (где показано неправильное направление реакций), то их всегда можно было бы разложить на составляющие, указанные на рисунке. Но так как гладкие поверхности не препятствуют скольжению по ним, то составляющих R'_a и R'_b быть не может.

2. Неподвижный цилиндрический шарнир или подшипник

Цилиндрическим шарниром называется соединение двух тел посредством пальца (болта), проходящего через отверстия в этих телах. Диаметр отверстия во втулке (рис. 9) несколько больше диаметра пальца.

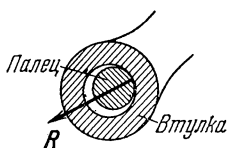


Рис. 9.

Тело, жестко скрепленное с втулкой, может только вращаться вокруг оси шарнира (оси пальца), перпендикулярной к плоскости рисунка.

Во многих случаях можно пренебречь трением в шарнире (между поверхностями пальца и втулки). В таком шарнире (называемом «идеальным») нет препятствий ни для поворота втулки вокруг оси пальца, ни для ее перемещения вдоль этой оси. Идеальный шарнир препятствует лишь перемещению втулки в направлении нормали к поверхности втулки и пальца, и, следовательно, его реакция может быть направленной только по этой нормали (по радиусу пальца). Но так как втулка в зависимости от ее расположения и приложенных к ней сил может прижиматься к любой точке пальца, то указать заранее направление реакции цилиндрического шарнира нельзя. Единственное, что можно утверждать (если пренебречь трением в шарнире), это то, что *реакция неподвижного цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной к его оси, и имеет радиальное направление.*

Для определения реакции связи в тех случаях, когда ее направление оказывается неопределенным, очень ча-

сто полезно заменить искомую реакцию несколькими составляющими реакциями, неизвестными уже только по модулю. Например, реакции шарнира A (рис. 10, a) или упора A (рис. 10, b) удобно разложить на горизонтальную R_1 и вертикальную R_2 составляющие. В обоих случаях можно считать, что связь A (шарнир или упор) препятствует перемещению тела как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях.

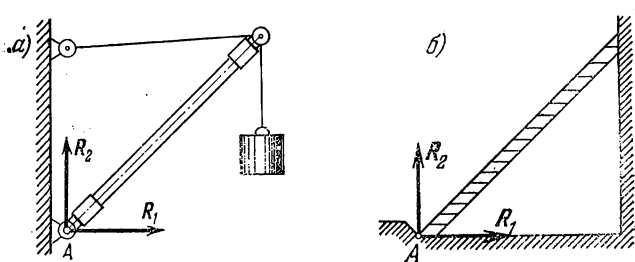


Рис. 10.

После того, как будут найдены модули каждой из составляющих реакций, можно найти (при необходимости) и полную реакцию связи как равнодействующую ее составляющих.

Заметим, что, разлагая реакцию на составляющие (в данных примерах на горизонтальную и вертикальную), можно не заботиться о правильности выбора направлений: по намеченным линиям их действия.

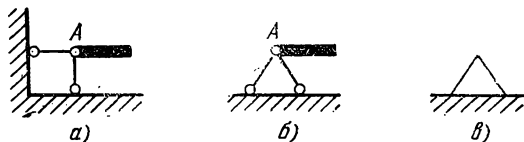


Рис. 11.

В случае, если в действительности та или иная составляющая окажется направленной в сторону, противоположную предположенной, мы будем (как это увидим дальше) получать для нее в ответе отрицательное значение.

Шарнирно-неподвижная опора часто схематически изображается двумя стержнями (рис. 11, a и b),

соединенными между собой на одном конце общим шарниром A , ось которого, очевидно, будет неподвижной. Реакция такой опоры проходит через ось шарнира, но не известна ни по модулю, ни по направлению и, следовательно, характеризуется двумя неизвестными элементами.

Определение модуля и направления реакции шарнирно-неподвижной опоры можно, как было сказано выше, заменить определением модулей двух составляющих этой реакции. Наличие в схеме шарнирно-неподвижной опоры двух стержней указывает на то, что неизвестны два элемента реакции данной связи.

По ГОСТу 2.770-68 шарнирно-неподвижная опора для стержня изображается так, как показано на рис. 11, в.

3. Опора на катках

Мы говорили до сих пор о связях, осуществляемых абсолютно гладкими поверхностями. Эти связи препятствуют перемещению тел только в направлении, нормальном к поверхности, и характеризуются одной нормальной реакцией. Негладкая поверхность не только препятствует перемещению, нарушающему связь, но и затрудняет перемещение по самой поверхности. Следовательно, реакция негладкой поверхности имеет две составляющие: одну — нормальную к поверхности, и другую — лежащую в плоскости скольжения (в общей касательной плоскости к поверхности тела и опорной поверхности) и направленную в сторону, противоположную той, в которую двигают или пытаются сдвинуть тело. Первая составляющая является нормальной реакцией, вторая носит название силы трения. Следовательно, негладкие опорные поверхности отличаются тем, что для них приходится дополнительно учитывать силу трения.

О том, как это делается, мы будем говорить дальше, в главе о трении. Сейчас отметим только, что хотя идеально гладких поверхностей, а следовательно, и идеальных связей в действительности не существует, но на практике во многих случаях силой трения можно пренебречь и практически считать связи идеальными.

Примером такой связи является часто применяемая *опора на катках* (рис. 12, а). Подвижность катка настолько велика и, следовательно, сила трения настолько

мала, что можно считать данную связь препятствующей лишь перемещению, перпендикулярному к опорной плоскости, почему она и характеризуется всегда лишь одной нормальной реакцией.

Опора на катках не препятствует перемещению оси шарнира параллельно опорной плоскости и представляет собой так называемую шарнирно-подвижную опору.

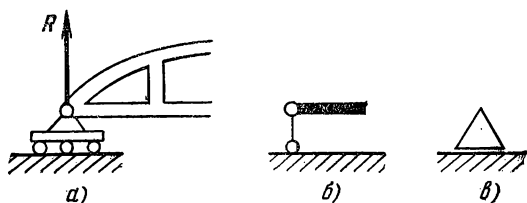


Рис. 12.

Такая опора часто схематически изображается одним стержнем с шарниром на конце (рис. 12, б). Реакция подобной опоры проходит через ось шарнира и направлена по нормали к опорной поверхности. Наличие в схеме опоры одного стержня указывает на то, что неизвестен лишь один элемент реакции шарнирно-подвижной опоры — ее модуль.

По ГОСТу 2.770-68 шарнирно-подвижная опора для стержня изображается так, как показано на рис. 12, в.

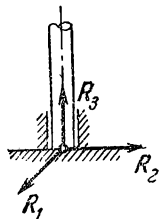


Рис. 13.

4. Подпятник

Подпятник (рис. 13) представляет собой соединение цилиндрического шарнира с опорной плоскостью. Такая связь позволяет валу (цилиндру) вращаться вокруг его оси и перемещаться вдоль нее, но только в одном направлении.

Реакция подпятника складывается из реакции цилиндрического подшипника, лежащей в плоскости, перпендикулярной к его оси (в общем случае она может быть разложена на составляющие R_1 и R_2 (рис. 13)), и нормальной реакции R_3 опорной плоскости.

5. Гибкая связь

Пусть груз весом G подвешен в точке A на нитях так, как показано на рис. 14.

Если считать нити нерастяжимыми, то они не дают точке A удаляться от точки C по направлению нити CA и от точки B по направлению нити BA . Следовательно, реакции¹⁾ T_C и T_B нерастяжимых гибких нитей всегда направлены вдоль нитей к точке их подвеса.

Гибкой связью, очевидно, может служить не только нить, но и трос, цепь и др.

6. Невесомый стержень

Нити на рис. 14 могут быть без изменения направлений реакций заменены твердыми стержнями, если пренебречь их весом и считать стержни соединенными посредством идеальных шарниров. При отсутствии трения в идеальных шарнирах приложенные к концам

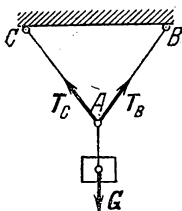


Рис. 14.

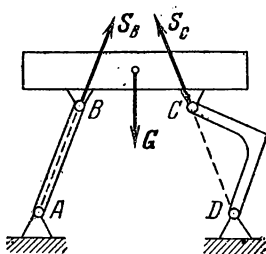


Рис. 15.

стержней силы всегда окажутся направленными вдоль этих стержней. Эти силы могут только растягивать или сжимать стержни. В самом деле, как мы знаем, идеальный шарнир характеризуется только одной, нормальной к оси шарнира, реакцией. Но две силы, приложенные к стержню в его концах, могут уравниваться только тогда, когда они равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, реакция невесомого и шарнирно закрепленного стержня направлена вдоль линии, соединяющей центры шарниров.

¹⁾ Реакции гибких связей принято обозначать буквой T .

Подобным же образом, очевидно, направлены и реакции шарнирно закрепленных стержней, подпирающих тело (рис. 15). *Алгебраическое значение силы, действующей вдоль стержня и растягивающей или сжимающей его, называется усилием в стержне*; при растяжении усилие обычно считается положительным, а при сжатии — отрицательным¹⁾.

В последующем изложении мы рассмотрим сначала сложение, разложение и равновесие сил в тех случаях, когда линии действия этих сил лежат в одной плоскости, а затем уже в тех случаях, когда они не лежат в одной плоскости. Изучение плоской системы мы начнем с так называемой системы сходящихся сил.

¹⁾ Реакции стержней часто обозначают буквой **S**.

ГЛАВА II

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 8. Сходящиеся силы. Сложение двух сил, приложенных в одной точке

Системой сходящихся сил называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Если мы перенесем все силы данной системы по линиям их действия в общую точку пересечения этих линий, то, согласно первому следствию из аксиом статики, действие системы на абсолютно твердое тело не изменится. Таким образом, любую систему сходящихся сил можно заменить эквивалентной системой сил, приложенных в одной точке.

В этой главе мы будем говорить лишь о такой системе сходящихся сил, линии действия которых расположены в одной плоскости, т. е. о так называемой *плоской системе сходящихся сил*.

Задача о сложении двух сил, приложенных в одной точке, графически решается весьма просто. Положим, что в точке A твердого тела приложены две силы P_1 и P_2 (рис. 16). На основании третьей аксиомы статики (правила параллелограмма сил) равнодействующая R_P данных сил приложена в той же точке A и изображается по модулю и направлению диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах.

Для нахождения равнодействующей нет необходимости строить весь параллелограмм $ABCD$, достаточно построить только один из треугольников ABC или ADC . Для построения одного из них (например, ABC , рис. 17) из конца вектора одной силы P_1 проводим вектор \overline{BC} ,

равный вектору второй силы P_2 . Замыкающая сторона AC треугольника ABC изображает по модулю и направлению равнодействующую двух данных сходящихся сил. Остается лишь в принятом масштабе измерить ее длину и углы φ_1 и φ_2 . Треугольник ABC (или ADC) называется *силовым треугольником*, а данный способ сложения двух сил — *правилом треугольника*.

Равнодействующую двух сил, приложенных к одной точке, нетрудно найти вычислением. Для этого строим тот же силовой треугольник ABC (или ADC), но не гонясь за точностью построения, так как теперь он будет

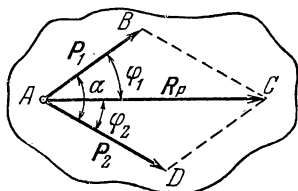


Рис. 16.

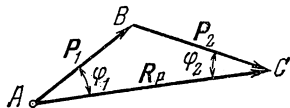


Рис. 17.

служить лишь для иллюстрации решения. Обозначим угол между данными силами P_1 и P_2 через α , а углы, которые равнодействующая образует с этими силами, — соответственно через φ_1 и φ_2 (рис. 16). Стороны треугольника ABC представляют, в известном масштабе, численные значения (модули) сил, а потому, согласно известной из тригонометрии теореме косинусов, будем иметь

$$R_P^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos \angle ABC.$$

Кроме того, $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$ и $\cos \angle ABC = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Подставляя данное значение в предыдущее равенство, будем иметь

$$R_P^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha,$$

откуда модуль равнодействующей двух сходящихся сил

$$R_P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha}. \quad (1)$$

Перед корнем берем знак плюс, так как модуль вектора всегда число положительное.

Определим теперь направление равнодействующей.

По теореме синусов, устанавливающей, что во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов, будем иметь из того же треугольника ABC

$$\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC},$$

но $\angle BCA = \angle CAD = \varphi_2$, $\angle BAC = \varphi_1$, $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$ и $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

Стороны же треугольника пропорциональны модулям сил. Следовательно, теорема синусов для данного силового треугольника дает следующую зависимость:

$$\frac{P_1}{\sin \varphi_2} = \frac{P_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R_P}{\sin \alpha}. \quad (2)$$

Формула (2) позволяет найти синусы углов между равнодействующей и составляющими силами, а следовательно, и сами эти углы.

Рассмотрим следующие, часто встречающиеся в задачах, частные случаи.

1) Если угол между данными силами $\alpha = 90^\circ$, то

$$\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$$

и модуль равнодействующей

$$R_P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}. \quad (3)$$

2) Если силы P_1 и P_2 направлены по одной прямой в одну сторону, то угол между ними $\alpha = 0$ и $\cos \alpha = 1$. Модуль равнодействующей

$$R_P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2} = P_1 + P_2. \quad (4)$$

Если силы P_1 и P_2 направлены по одной прямой в противоположные стороны, то угол между ними $\alpha = 180^\circ$, $\cos \alpha = -1$ и $R_P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2} = P_1 - P_2$, если $P_1 > P_2$, и $R_P = P_2 - P_1$, если $P_1 < P_2$.

Следовательно, *равнодействующая двух сил, действующих на тело по одной прямой, направлена по той же прямой, а ее модуль равен сумме модулей составляющих сил в случае, если силы направлены в одну сторону, и абсолютной величине разности — в случае, если силы направлены в противоположные стороны.*

Задача 1. Два человека тянут за веревки, привязанные к кольцу в точке A (рис. 18) и направленные под прямым углом, один с

силой $P_1 = 120$ Н, другой с силой $P_2 = 90$ Н. С какой силой должен тянуть третий человек, чтобы кольцо осталось неподвижным?

Решение. Для того чтобы кольцо осталось неподвижным, третий человек должен действовать на него с силой, уравновешивающей действия двух других людей. Так как уравновешивающая и равнодействующая силы равны по модулю и противоположны по направлению (второе следствие из аксиом статики), то задача сводится к определению модуля и направления равнодействующей двух данных сходящихся сил.

Согласно формуле (3) модуль равнодействующей

$$R_P = \sqrt{90^2 + 120^2} = 150 \text{ Н.}$$

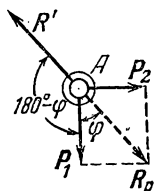


Рис. 18.

Угол, образованный равнодействующей с направлением силы в 120 Н, определяется из прямоугольного силового треугольника (рис. 18):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{90}{120} = 0,75, \quad \varphi = 36^\circ 50'.$$

Следовательно, третий человек должен тянуть кольцо с силой R' в 150 Н по направлению, образуемому с заданной силой в 120 Н угол в $180^\circ - \varphi$, т. е. угол $143^\circ 10'$.

§ 9. Разложение силы на две сходящиеся составляющие

Разложить силу на две или несколько составляющих сил — значит найти такую систему двух или нескольких сил, которая бы производила на тело то же самое действие, что и одна данная сила. Другими словами, разложить силу, например, на две составляющие — это значит найти такие две силы, равнодействующая которых была бы равна данной силе.

Ясно, что раз возможно две сходящиеся силы P_1 и P_2 заменить одной силой (равнодействующей) P , то и, наоборот, действие на тело одной данной силы P всегда можно заменить действием двух сил P_1 и P_2 , сходящихся на линии действия данной силы. При этом необходимо только, чтобы данная сила P по модулю и направлению изображалась диагональю параллелограмма, сторонами которого служат отрезки, изображающие силы P_1 и P_2 .

Так как по данной диагонали можно построить бесчисленное множество параллелограммов, то для того, чтобы решение было определенным, необходимо задать еще и дополнительные условия.

Таковыми дополнительными условиями могут быть:
1) задание двух направлений, по которым должны

действовать составляющие; 2) задание модуля и направления одной из составляющих сил; 3) задание модулей обеих составляющих сил; 4) задание модуля одной составляющей силы и направления другой.

Рассмотрим первый, наиболее часто встречающийся, случай. Данную силу \mathbf{P} требуется разложить на две сходящиеся силы, направления которых OM и ON заданы (рис. 19)¹⁾.

Для решения задачи из конца A вектора силы \mathbf{P} проводим прямые AB и AC , соответственно параллельные прямым ON и OM . Получается параллелограмм $OBAC$, для которого сила \mathbf{P} является диагональю. Векторы \vec{OB} и \vec{OC} дают в том же масштабе, что и заданная сила \mathbf{P} , искомые составляющие \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 .

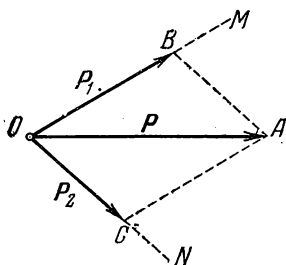


Рис. 19.

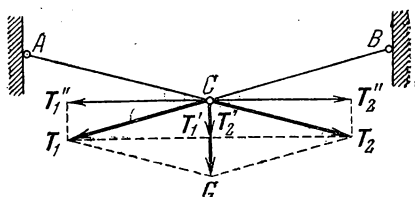


Рис. 20.

Так как сумма непараллельных сторон параллелограмма всегда больше каждой из его диагоналей, то сумма модулей двух сходящихся составляющих, на которые мы разлагаем данную силу, всегда больше модуля этой силы.

Чем больше угол между направлениями составляющих сил, тем больше и их численная величина. При достаточно большом угле между составляющими модуль каждой из них может быть и больше модуля разлагаемой силы.

Пусть, например, какой-нибудь груз весом G подвешен в середине C троса, закрепленного своими концами A и B на одной высоте (рис. 20). Чтобы определить натяжение каждой ветви троса, разложим по правилу

¹⁾ Очертание тела, к которому приложена в точке O сила \mathbf{P} , как не имеющее значения для решения задачи, здесь и в дальнейшем мы не изображаем.

параллелограмма силу G на составляющие T_1 и T_2 , направленные по прямым BC и AC . Из чертежа видно, что модули T_1 и T_2 сил, натягивающих ветви троса и являющихся составляющими силы G тяжести груза, больше модуля этой силы. Объясняется это тем обстоятельством, что силы T_1 и T_2 частично противодействуют одна другой. В самом деле, каждую из этих сил можно в свою очередь разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие. Равные по модулю и противоположно направленные составляющие T'_1 и T'_2 будут, очевидно, взаимно уравновешиваться. Модули же вертикальных составляющих T''_1 и T''_2 будут в сумме как раз равны модулю вертикальной силы G .

Задача 2. Силу P , равную по модулю 96 Н, заменить двумя силами P_1 и P_2 , образующими с силой P углы в 30° и 45° .

Решение. Пользуемся формулой (2):

$$\frac{P_1}{\sin \varphi_2} = \frac{P_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R_P}{\sin \alpha}.$$

В данном случае $\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 45^\circ$, $\alpha = \varphi_1 + \varphi_2 = 75^\circ$ и $R_P = P = 96$ Н. Отсюда

$$P_1 = \frac{R \sin \varphi_2}{\sin \alpha} = \frac{96 \cdot 0,707}{0,966} \approx 70,3 \text{ Н},$$

$$P_2 = \frac{R \sin \varphi_1}{\sin \alpha} = \frac{96 \cdot 0,5}{0,966} \approx 49,7 \text{ Н}.$$

Задача 3. Кран¹⁾ ABC (рис. 21, а) удерживает груз $G = 10$ кН. Найти усилия S_1 и S_2 в стержнях AB и BC . Размеры стержней таковы: $AB = 3,8$ м, $BC = 2,6$ м, а расстояние $AC = 2$ м.

Решение. Разлагаем силу G на две составляющие по направлению стержней BC и AB , для чего строим параллелограмм $abcd$ (рис. 21, б) со сторонами, параллельными этим стержням, и диагональю bd , направленной вертикально вниз (соответственно направлению силы G тяжести груза) и численно равной, в каком-либо масштабе, модулю силы G .

Длины сторон ba и bc построенного параллелограмма дадут нам в том же масштабе, в каком был отложен модуль силы G , абсолютные значения искомых усилий S_1 и S_2 .

¹⁾ Краном (подъемным) называется устройство, служащее для подъема и перемещения грузов.

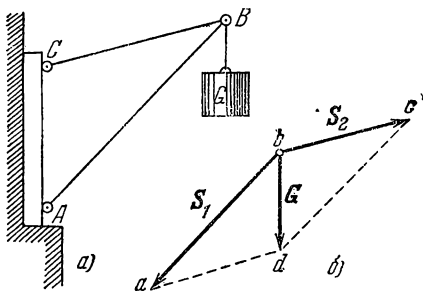


Рис. 21.

Для вычисления этих усилий в данном случае проще всего воспользоваться геометрическими соображениями. Треугольники CBA и bcd (рис. 21, a и b) подобны, так как стороны этих треугольников параллельны. Из подобия этих треугольников находим

$$\frac{bc}{BC} = \frac{cd}{AB} = \frac{bd}{AC}.$$

Или, принимая во внимание, что стороны треугольника bcd пропорциональны модулям изображаемых ими сил, получим

$$\frac{|S_1|}{BC} = \frac{|S_2|}{AB} = \frac{G}{AC}.$$

Отсюда

$$|S_2| = \frac{BC}{AC} G = \frac{2,6}{2} \cdot 10 = 13 \text{ кН}$$

и

$$|S_1| = \frac{AB}{AC} G = \frac{3,8}{2} \cdot 10 = 19 \text{ кН}.$$

Если учесть направление сил S_1 и S_2 , то ясно, что стержень AB испытывает сжатие, а потому $S_1 = -19 \text{ кН}$, стержень BC растягивается, а потому $S_2 = +13 \text{ кН}$.

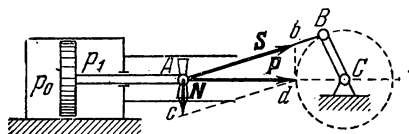


Рис. 22.

Определить силу S , передаваемую шатуну, и давление N ползуна A на направляющие параллели при том положении поршня, когда угол

$$\angle ABC = 90^\circ.$$

Решение. Сила давления пара на поршень

$$P = (p_0 - p_1) \frac{\pi d^2}{4} = (700 - 100) \frac{3,14 \cdot 0,4^2}{4} = 75,4 \text{ кН}.$$

Эта сила давления на поршень передается через шток точке A ползуна. Перенесем силу P вдоль линии ее действия в точку A , от-

¹⁾ В системе СИ за единицу давления принимается паскаль (сокращенно — Па), т. е. давление, вызываемое силой в 1 Н, равномерно распределенное по поверхности площадью в 1 м². Употребляется пока еще (в технической системе) единица давления, равная 1 кгс/см² \approx 98,1 кПа, где кПа — килопаскаль.

Единица давления в системе СИ получила свое название в честь выдающегося французского математика и физика Паскаля (1623—1662).

ложив $\vec{Ad} = \mathbf{P}$ (в каком-либо масштабе), и разложим ее на две составляющие: силу $\mathbf{S} = \vec{Ab}$, передаваемую шатуну и направленную вдоль него, и вертикальную силу $\mathbf{N} = \vec{Ac}$, с которой ползун давит на нижнюю параллель. Прямоугольные треугольники ABC и Adc , как имеющие равные острые углы BAC и Adc , подобны.

Составляя отношения сходственных сторон, получим

$$\frac{Ac}{BC} = \frac{cd}{AC} = \frac{Ad}{AB}$$

или, принимая во внимание, что $Ab = cd$ и что стороны силового треугольника пропорциональны модулям соответствующих сил, получим

$$\frac{N}{BC} = \frac{S}{AC} = \frac{P}{AB}.$$

Отсюда сила давления ползуна A на направляющую параллель

$$N = P \frac{BC}{AB} = 75,4 \cdot \frac{0,36}{1,8} = 15,1 \text{ кН.}$$

Сила, передаваемая поршнем шатуну,

$$S = P \frac{AC}{AB} = P \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{AB} = 75,4 \cdot \frac{\sqrt{3,37}}{1,8} \approx 77 \text{ кН.}$$

§ 10. Силовой многоугольник

Пусть, например, требуется сложить четыре сходящиеся силы \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 и \mathbf{P}_4 .

Изобразим данные силы в каком-либо произвольном масштабе векторами, приложенными в точке A пересечения их линий действия (рис. 23, а).

Будем складывать силы последовательно, пользуясь уже установленным нами для сложения двух сходящихся сил правилом силового треугольника.

Сначала сложим по этому правилу какие-либо две из данных сил, например силы \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 , для чего из конца силы \mathbf{P}_1 проведем вектор $\vec{BC} = \mathbf{P}_2$. равнодействующая \mathbf{R}_{12} сил \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 изобразится в выбранном масштабе замыкающей стороной треугольника, т. е. вектором \vec{AC} . Сложим теперь по тому же правилу силы \mathbf{R}_{12} и \mathbf{P}_3 , для чего из точки C проведем вектор $\vec{CD} = \mathbf{P}_3$ и соединим точки A и D . Вектор $\vec{AD} = \mathbf{R}_{123}$ представляет в масштабе равнодействующую сил \mathbf{R}_{12} (в свою очередь являющуюся равнодействующей сил \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2) и \mathbf{P}_3 , т. е. заменяет собой действие сил \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 .

Продолжая сложение дальше, сложим силы R_{123} и P_4 . Проведем из точки D вектор $\overrightarrow{DE} = P_4$ и соединим прямой точки A и E . Вектор $\overrightarrow{AE} = R_p$, представляя в выбранном масштабе равнодействующую сил R_{123} и P_4 , будет, очевидно, служить и равнодействующей всей данной системы сходящихся сил.

Процесс построения равнодействующей системы сходящихся сил обычно удобнее вести несколько иным путем (рис. 23, б). Выберем в плоскости действия сил

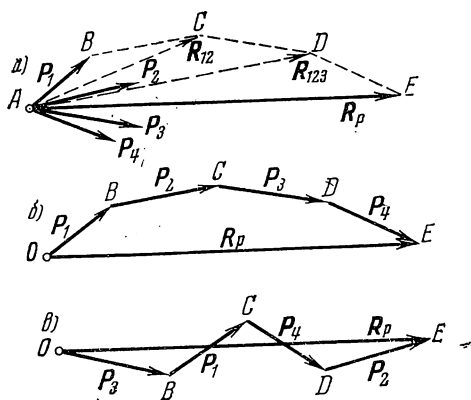


Рис. 23.

произвольную точку O и отложим от нее вектор \overrightarrow{OB} , равный в принятом масштабе силе P_1 ; из конца его (точки B) проводим вектор \overrightarrow{BC} , равный силе P_2 ; из конца этого вектора (точки C) проводим вектор \overrightarrow{CD} , равный силе P_3 , и т. д., помещая всякий раз начало следующего вектора в конце предыдущего, пока не исчерпаем всех сил.

Полученный многоугольник $OBCDE$, стороны которого в выбранном масштабе равны данным силам и одинаково с ними направлены, называется *силовым многоугольником*. В силовом многоугольнике стрелки следуют всегда одна за другой, а не навстречу друг другу.

Замыкающая сторона \overrightarrow{OE} силового многоугольника, направленная от начала первой силы к концу последней силы, изображает в выбранном масштабе равнодейст-

вующую данной системы сходящихся сил как по модулю, так и по направлению. Это очевидно из хода построения и из сравнения рис. 23, а и б.

Для того чтобы определить линию действия равнодействующей, достаточно провести через общую точку линий действия сходящихся сил прямую, параллельную замыкающей стороне силового многоугольника.

Полученное правило сложения сходящихся сил по способу многоугольника является общим для сложения любых векторов и называется правилом геометрического сложения. Оно справедливо при любом числе слагаемых векторов (в данном случае при любом числе сходящихся сил).

В виде формулы геометрическое сложение сил пишется так:

$$R_{гл} = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Геометрическая сумма всех сил данной системы называется главным вектором этой системы.

Все слагаемые данной суммы имеют один и тот же вид и отличаются друг от друга только значениями индекса при слагаемых. Такую сумму, так же как и аналогичные ей, можно сокращенно записать с помощью символа суммы, изображаемого обычно буквой Σ (заглавная греческая буква «сигма»):

$$R_{гл} = \sum_{k=1}^{k=n} P_k,$$

причем символ $\sum_{k=1}^{k=n}$ означает, что нужно сложить выражения, стоящие за ним, придавая индексу k все целые значения от значения, указанного под символом «сигма», до значения, указанного над символом «сигма». В целях упрощения записи пределы изменения индекса иногда опускают, подразумевая всегда в этом случае под Σ сумму n слагаемых, причем $k = 1, 2, 3, \dots, n$, т. е., например, записывают¹⁾, что

$$R_{гл} = \sum P_k. \quad (5)$$

Из установленного выше правила нахождения равнодействующей по способу силового многоугольника

¹⁾ Подобной записью мы и будем пользоваться в дальнейшем во всех аналогичных случаях.

следует, что *равнодействующая R_P системы сходящихся сил равна их главному вектору $R_{гл}$* . Линия действия этой равнодействующей проходит через общую точку пересечения линий действия составляющих сил.

Понятие главного вектора данной системы сил (т. е. геометрической суммы сил), вообще говоря, не эквивалентно понятию их равнодействующей. В случаях, когда линии действия составляющих сил не пересекаются в одной точке, геометрическая сумма сил, как мы увидим дальше, не вполне определяет их равнодействующую. Более того, в отдельных случаях система может и не иметь равнодействующей вовсе, тогда как главный вектор можно найти для любой системы сил.

Нужно заметить, что порядок, в котором строится векторный многоугольник, может быть изменен; замыкающая его сторона не изменится при этом (рис. 23, в) ни по модулю, ни по направлению.

Геометрическая сумма не изменяется от перемены мест слагаемых.

Задача 5. К точке тела приложены четыре силы, лежащие в одной вертикальной плоскости и образующие между собой углы в 75° , 45° и 120° . Первая сила направлена вправо и вверх под углом в 60° к вертикали. Модули сил: $P_1 = 150$ Н, $P_2 = 200$ Н, $P_3 = 250$ Н, $P_4 = 120$ Н.

Определить модуль и направление равнодействующей (графически).

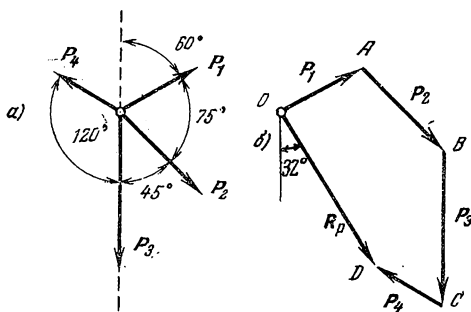


Рис. 24.

Решение. Выбрав какой-либо масштаб сил, например $\mu_p = 10$ Н/мм, откладываем по заданным направлениям отрезки, изображающие соответствующие векторы сил (рис. 24, а). Из произвольной точки O проводим отрезок OA , равный вектору заданной силы P_1 (рис. 24, б). Из конца A этого отрезка проводим отрезок AB , равный вектору другой заданной силы P_2 и т. д. Замыкающая

сторона OD полученного таким образом силового многоугольника и будет изображать в выбранном масштабе главный вектор заданной системы сходящихся сил, равный их равнодействующей ($R_{гл} = R_P$).

Длина замыкающей $OD = 30$ мм, следовательно, модуль равнодействующей $R_P = \mu_P \cdot OD = 10 \cdot 30 = 300$ Н. Измерив угол между вертикалью и направлением замыкающей, находим: равнодействующая R_P направлена вправо и вниз под углом 32° к вертикали.

Задача 6. Сила тяги буксирного парохода $P = 32$ кН. Сколько следующих друг за другом барж может тянуть пароход с постоянной по модулю и по направлению скоростью, если сопротивление воды движению парохода $P_1 = 8$ кН, а сопротивление движению каждой баржи $P_2 = 6$ кН. Определить также натяжение канатов, протянутых между пароходом и первой баржей, между первой и второй баржами и т. д.

Решение. Так как пароход тянет караван барж с постоянной скоростью, то его сила тяги является уравновешивающей для сил сопротивления воды движению парохода и барж и, следовательно, равна по модулю равнодействующей этих сил, направленных по одной прямой в одну сторону: $P = P_1 + P_2 n$. Отсюда число барж

$$n = \frac{P - P_1}{P_2} = \frac{32 - 8}{6} = 4.$$

Натяжение каната между пароходом и первой баржей равно сопротивлению воды движению четырех барж: $T_1 = P_2 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$ кН. Натяжение каната между первой и второй баржами равно сопротивлению воды движению трех барж: $T_2 = P_2 \cdot 3 = 18$ кН. Натяжение каната между третьей и четвертой (последней) баржами $T_4 = P_2 = 6$ кН.

§ 11. Проекция вектора на ось. Определение вектора по его проекциям

Аналитическое определение равнодействующей системы сходящихся сил, т. е. определение модуля и направления искомого вектора путем вычисления, основано на применении метода проекций. Ознакомимся с основами этого метода.

Прямая неограниченной длины, на которой задано определенное направление, называется осью. Возьмем (рис. 25, а) вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{Q}$ и ось x , лежащие в плоскости чертежа. Оси припишем направление, указанное на чертеже стрелкой. Опустим из начала A и конца B вектора перпендикуляры на ось.

Основания перпендикуляров, опущенных из данных точек на ось, называются проекциями этих точек на данную ось.

Длина отрезка оси, заключенного между проекциями на ось начала и конца данного вектора, называется проекцией этого вектора на данную ось.

Проекцию вектора на ось будем обозначать той же буквой, которой обозначается вектор, но светлой, указывая подстрочной маленькой буквой ось проекции. Так, например, проекция вектора Q на ось x обозначается через Q_x .

Проекция вектора на ось считается положительной, если ее направление совпадает с принятым (положительным) направлением оси, и отрицательной — в противоположном случае. Из рис. 25, а и 25, б нетрудно видеть, что проекция вектора на ось получается положительной, когда вектор (рис. 25, а) составляет острый

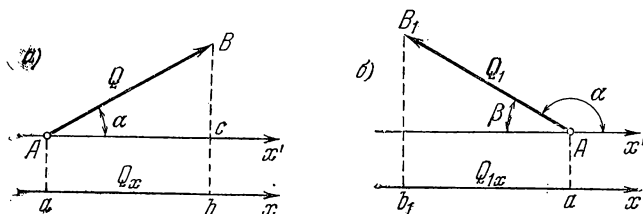


Рис. 25.

угол с направлением оси проекций, и отрицательной, когда вектор составляет с направлением оси проекций тупой угол (рис. 25, б). Следовательно, $Q_x = \pm ab$, причем тот или другой знак в этой формуле берется согласно установленному правилу.

Заметим, что проекция вектора на ось представляет собой не векторную, а скалярную алгебраическую величину, так как она вполне определяется знаком и численным значением соответствующего отрезка оси проекций.

Вместо того чтобы проектировать вектор на заданную ось, часто оказывается более удобным проектировать его на ось, параллельную данной и одинаково с ней направленную, но проходящую через начало вектора. Ясно, что проекции вектора на две параллельные и одинаково направленные оси равны между собой, как отрезки параллельных между параллельными.

Проведем через начало A вектора Q ось x' (рис. 25, а), параллельную данной оси x и одинаково с ней на-

правленную. Угол, образованный вектором с положительным направлением оси проекций, обозначим через α . Тогда из прямоугольного треугольника ABc получим

$$ab = Ac = AB \cos \alpha, \text{ или } Q_x = Q \cos \alpha. \quad (6)$$

Проекция вектора на ось равна модулю этого вектора, умноженному на косинус угла между вектором и положительным направлением оси проекций.

Это равенство во всех случаях определяет не только численное значение проекции, но и ее знак. В рассматриваемом случае (рис. 25, а) угол α острый, следовательно, его косинус положителен и проекция положительна. В случае отрицательной проекции угол α между вектором и положительным направлением оси проекций всегда будет тупой. Но для тупого угла (рис. 25, б) $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$, и в этом случае также $Q_{1x} = -ab_1 = -AB_1 \cos \beta = AB_1 \cos \alpha$.

Для того чтобы при вычислении проекций не иметь дела с тригонометрическими функциями тупых углов, проще модуль проектируемого вектора умножить сразу же на косинус острого угла между вектором и осью проекций, а затем уже приписывать проекции знак плюс, если угол между вектором и положительным направлением оси проекций острый, и минус, если этот угол тупой.

Рассмотрим теперь два частных случая.

1) Вектор параллелен оси проекций, т. е. $\alpha = 0$ или $\alpha = 180^\circ$ в зависимости от того, с каким, положительным или отрицательным, направлением оси проекций совпадает направление вектора. В этом случае $\cos \alpha = \pm 1$ и $Q_x = \pm Q$.

Следовательно, проекция вектора на параллельную ему ось равна модулю вектора, взятому со знаком плюс или минус в зависимости от направления вектора.

2) Вектор перпендикулярен к оси проекций, т. е. $\alpha = 90^\circ$. В этом случае $\cos \alpha = 0$ и $Q_x = 0$.

Следовательно, проекция вектора на перпендикулярную к нему ось равна нулю.

Если вектор и ось заданы, то проекция вектора определяется единственным образом. Однако задание одной проекции вектора еще не определяет самого вектора, так как различные векторы могут иметь одинаковые проекции на одну и ту же ось (рис. 26). Для определения вектора нужно знать по крайней мере его проекции

на две непараллельные оси, в плоскости которых лежит данный вектор. Удобнее, если это будут взаимно перпендикулярные оси (оси прямоугольной декартовой системы координат на плоскости). В этом случае, как

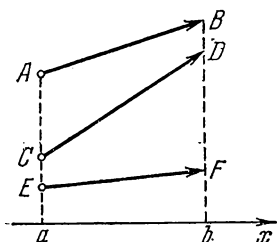


Рис. 26.

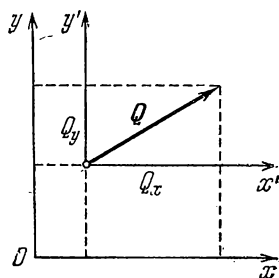


Рис. 27.

видно из рис. 27, вектор Q является диагональю прямоугольника, стороны которого численно равны проекциям вектора на координатные оси. Отсюда следует, что модуль вектора

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}. \quad (7)$$

Модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на две взаимно перпендикулярные оси, в плоскости которых лежит данный вектор.

В формуле (7) нужно брать арифметическое значение корня, так как модуль вектора есть число положительное.

Направление вектора определяется из равенства $Q_x = Q \cos(\widehat{Q, x})$ и $Q_y = Q \cos(\widehat{Q, y})$, где $(\widehat{Q, x})$ и $(\widehat{Q, y})$ — углы, образуемые вектором с положительными направлениями соответствующих осей. Отсюда

$$\cos(\widehat{Q, x}) = \frac{Q_x}{Q}, \quad \cos(\widehat{Q, y}) = \frac{Q_y}{Q}. \quad (8)$$

Косинус угла между вектором и положительным направлением оси проекций называется направляющим косинусом. Он равен отношению соответствующей проекции вектора к модулю вектора.

Формула (7) определяет модуль вектора, а формулы (8) дают возможность вычислить косинусы углов

между вектором и осями координат, а следовательно, и сами эти углы, определяющие направление вектора.

Таким образом, всякий вектор вполне определяется заданием его проекций на координатные оси (двух, если вектор и оси лежат в одной плоскости).

§ 12. Проекция геометрической суммы векторов на ось

Теорема. *Проекция геометрической суммы векторов на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.*

Пусть дано несколько векторов, например четыре вектора Q_1 , Q_2 , Q_3 и Q_4 (для упрощения чертежа взяты векторы, расположенные в одной плоскости, но теорема остается верной и в общем случае).

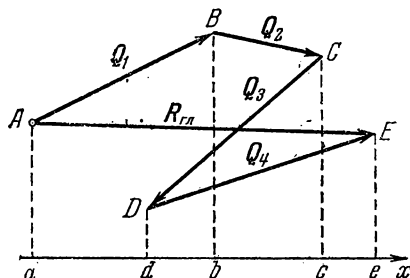


Рис. 28.

По правилу сложения векторов геометрической суммой данных векторов будет вектор $\overrightarrow{AE} = \vec{R}_{\text{гл}}$, представляющий собой замыкающую сторону векторного многоугольника $ABCDE$, сторонами которого служат составляющие векторы (рис. 28).

Проектируя векторы на ось x (рис. 28), получим $Q_{1x} = ab$, $Q_{2x} = bc$, $Q_{3x} = -cd$, $Q_{4x} = de$, $R_{\text{гл}x} = ae$. Из чертежа видно, что $ae = ab + bc - cd + de$, т. е.

$$R_{\text{гл}x} = Q_{1x} + Q_{2x} + Q_{3x} + Q_{4x} = \sum Q_{kx}, \quad (9)$$

что и требовалось доказать.

Данная теорема справедлива для любых векторов и при любом их числе.

§ 13. Аналитическое определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Мы уже знаем, что равнодействующая системы сходящихся сил равна их геометрической сумме. Вместе с тем из § 12 мы знаем, что проекция геометрической суммы векторов на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.

Так как это положение справедливо для любых векторов, то отсюда следует, что *проекция равнодействующей системы сходящихся сил на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось.*

Обозначая проекции равнодействующей R_P на координатные оси x и y через R_{Px} и R_{Py} , а проекции составляющих сил на те же оси, как это часто принято, заглавными буквами X и Y с соответствующими индексами, мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} R_{Px} &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \sum X_k, \\ R_{Py} &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \sum Y_k. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если известны проекции какой-либо силы на две взаимно перпендикулярные оси, в плоскости которых лежит вектор данной силы¹⁾, то для определения ее модуля и направления можно воспользоваться формулами (7) и (8). Модуль равнодействующей плоской системы сходящихся сил определяется формулой

$$R_P = \sqrt{R_{Px}^2 + R_{Py}^2} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2}. \quad (11)$$

Углы между равнодействующей и координатными осями, а следовательно, и направление равнодействующей определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{R_P, x}) &= \frac{R_{Px}}{R_P} = \frac{\sum X_k}{\sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2}}, \\ \cos(\widehat{R_P, y}) &= \frac{R_{Py}}{R_P} = \frac{\sum Y_k}{\sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

¹⁾ Мы рассматриваем плоскую систему сходящихся сил, поэтому плоскость, в которой расположены силы, можно принять за координатную плоскость.

Формулы (11) и (12) дают возможность определить аналитически модуль и направление равнодействующей системы сходящихся сил. Входящие в них проекции составляющих сил P_1, P_2, \dots, P_n легко вычисляются по формулам (6):

$$X_1 = P_1 \cos(\widehat{P_1, x}),$$

$$X_2 = P_2 \cos(\widehat{P_2, x}),$$

$$X_n = P_n \cos(\widehat{P_n, x}),$$

$$Y_1 = P_1 \cos(\widehat{P_1, y}),$$

$$Y_2 = P_2 \cos(\widehat{P_2, y}),$$

$$Y_n = P_n \cos(\widehat{P_n, y}).$$

Задача 7. Даны силы $P_1 = 10$ Н, $P_2 = 10$ Н, $P_3 = 15$ Н, $P_4 = 20$ Н, приложенные в одной точке. Направления сил указаны на рис. 29. Углы между векторами:

$$(\widehat{P_1, P_2}) = 50^\circ, \quad (\widehat{P_2, P_3}) = 70^\circ,$$

$$(\widehat{P_3, P_4}) = 80^\circ.$$

Определить (аналитически) равнодействующую данных сил.

Решение. Общую точку O приложения заданных сил принимаем за начало координат, линию действия силы P_1 принимаем за ось x . Ось y проводим перпендикулярно к оси x , как показано на рис. 29.

Проектируя все силы на координатные оси, получим по формуле (6):

$$X_1 = P_1 \cos 0^\circ = P_1 = 10 \text{ Н},$$

$$X_2 = P_2 \cos 50^\circ = 10 \cdot 0,643 = 6,43 \text{ Н},$$

$$X_3 = -P_3 \cos(180^\circ - 120^\circ) = -P_3 \cos 60^\circ = -15 \cdot 0,5 = -7,5 \text{ Н},$$

$$X_4 = -P_4 \cos(180^\circ - 160^\circ) = -P_4 \cos 20^\circ = -20 \cdot 0,940 = -18,8 \text{ Н},$$

$$Y_1 = P_1 \cos 90^\circ = 0,$$

$$Y_2 = P_2 \cos 40^\circ = 10 \cdot 0,766 = 7,66 \text{ Н},$$

$$Y_3 = P_3 \cos 30^\circ = 15 \cdot 0,866 = 12,99 \text{ Н},$$

$$Y_4 = -P_4 \cos 70^\circ = -20 \cdot 0,342 = -6,84 \text{ Н}.$$

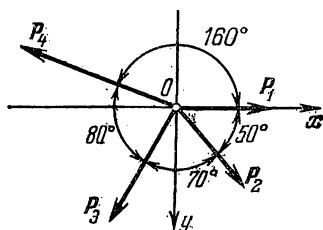


Рис. 29.

Отсюда по формуле (10) определяем проекции равнодействующей

$$R_{Px} = \sum X_k = -9,87 \text{ Н}, \quad R_{Py} = \sum Y_k = 13,81 \text{ Н}.$$

По формуле (11) определяется модуль равнодействующей

$$R_P = \sqrt{R_{Px}^2 + R_{Py}^2} = \sqrt{(-9,87)^2 + 13,81^2} \approx 17 \text{ Н}.$$

Направление равнодействующей определяется из формул (12):

$$\cos(\widehat{R_P, x}) = \frac{R_{Px}}{R} = -\frac{9,87}{17} = -0,580, \quad \cos(\widehat{R_P, y}) = \frac{R_{Py}}{R} = \frac{13,81}{17} = 0,812.$$

Отсюда находим (при помощи таблиц или логарифмической линейки) углы между линией действия равнодействующей R_P и положительным направлением осей координат:

$$(\widehat{R_P, x}) = 125^\circ 30', \quad (\widehat{R_P, y}) = 35^\circ 30'.$$

§ 14. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил

Всякая система сходящихся сил может быть заменена равнодействующей. Ясно, что если такая система сходящихся сил находится в равновесии, т. е. эквивалентна нулю, то равнодействующая должна равняться нулю.

Равенство нулю равнодействующей является необходимым и достаточным условием равновесия системы сходящихся сил.

Соответственно двум способам определения равнодействующей условие равновесия плоской системы сходящихся сил может быть выражено в двух формах.

1. *Условие равновесия в геометрической форме.* Геометрически равнодействующая сходящихся сил определяется как замыкающая сторона силового многоугольника. Если равнодействующая равна нулю, то нужно, чтобы равнялась нулю и замыкающая сторона и, следовательно, силовой многоугольник замыкался сам по себе. Отсюда получается следующее условие: *для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный для этой системы сил, был замкнутым.*

На рис. 30 построен замкнутый силовой многоугольник для находящейся в равновесии плоской системы сходящихся сил P_1 , P_2 , P_3 и P_4 . Необходимо заметить,

что в замкнутом силовом многоугольнике конец вектора последней силы совпадает с началом вектора первой, а стрелки векторов всех сил указывают одну и ту же сторону обхода периметра многоугольника.

2. *Условие равновесия в аналитической форме.* Аналитически модуль равнодействующей определяется по формуле (11):

$$R_P = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2}.$$

Но если $R_P = 0$, то равно нулю и подкоренное выражение. Так как стоящие под корнем слагаемые, как квадраты некоторых (безразлично, положительных или отрицательных) чисел, всегда положительны, то R_P может равняться нулю только в том случае, если каждое из этих слагаемых равно нулю в отдельности

$$\sum X_k = 0 \text{ и } \sum Y_k = 0. \quad (13)$$

Эти уравнения, выражающие собой в аналитической форме необходимые и достаточные условия равновесия сил, называются уравнениями равновесия.

Для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы порознь равнялись нулю суммы проекций всех сил на каждую из двух любых взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости действия сил.

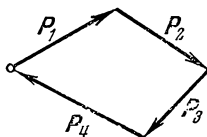
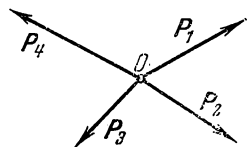


Рис. 30.

§ 15. Теорема о равновесии трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости

Если три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, взаимно уравновешиваются, то линии их действия пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть в точках A_1 , A_2 и A_3 приложены три непараллельные взаимно уравновешивающиеся силы P_1 , P_2 и P_3 , расположенные в одной плоскости (рис. 31). Так как данные силы не параллельны, то линии действия двух из них, например P_1 и P_2 , непременно пересекаются в какой-нибудь точке A . Перенеся силы P_1 и P_2 по линиям действия в точку A и

сложив их по правилу параллелограмма, получим равнодействующую силу R_P . Теперь можно считать, что на тело действуют только две силы: R_P и P_3 . Эти силы должны быть равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны, так как по условию данные силы уравниваются. Поэтому линия действия силы P_3 должна совпадать с линией действия силы R_P и, следовательно, проходить через точку A , в которой пересекаются линии действия сил P_1 и P_2 .

Доказанное условие равновесия трех непараллельных сил является необходимым, но не достаточным условием.

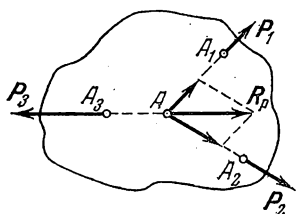


Рис. 31.

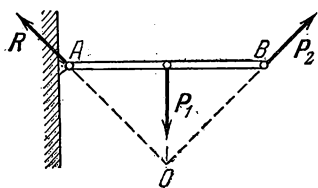


Рис. 32.

Мы можем утверждать, что если три непараллельные силы находятся в равновесии, то линии их действия пересекаются в одной точке. Но мы не вправе сделать обратного заключения: если линии действия трех сил пересекаются в одной точке, то отсюда вовсе не следует, что эти три силы находятся в равновесии.

Если тело находится в равновесии под действием трех (в это число входят и неизвестные реакции связей) непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то направление реакций связей может быть определено на основании предыдущей теоремы, согласно которой линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке.

На рис. 32 показан основанный на данной теореме способ определения направления реакции связи (реакции R неподвижного шарнира A). Как видно из рисунка, для определения направления реакции нужно продолжить линии действия приложенных к телу (стержню AB) сил P_1 и P_2 до их пересечения в точке O . Прямая, соединяющая точку O с неподвижной точкой A (с неподвижным болтом шарнира, рассматриваемым как точка), является линией действия реакции R шарнира A .

§ 16. Замечания к решению задач о равновесии системы сил

При решении задач о равновесии и притом не только сходящихся сил, но и сил, расположенных любым образом, рекомендуется придерживаться следующего порядка. Прежде всего необходимо хорошо уяснить себе все условия задачи и что именно спрашивается в ней, чтобы все дальнейшие действия имели вполне определенную целевую установку. Затем тело или точку, равновесие которых предполагается рассматривать в данной задаче, нужно освободить от связей, заменив последние на основании принципа освобождаемости (стр. 34) соответствующими реакциями. Придерживаясь приблизительно некоторого масштаба, нужно сделать ясный схематический чертеж, нанеся на него все активные силы и все реакции связей, приложенные к рассматриваемому телу. Реакции связей почти всегда бывают неизвестны; определение их модуля, а иногда модуля и направления по заданным известным силам, приложенным к данному телу, как раз и составляет содержание большинства задач статики. Для того чтобы определять направление реакций связей, нужно пользоваться теми соображениями, о которых мы говорили ранее (§ 7).

После того как четко зафиксированы все активные силы и реакции связей, приложенные к данному находящемуся в равновесии телу, мы пользуемся условиями равновесия этих сил в геометрической или аналитической форме, смотря по тому, какая из них оказывается более простой и удобной в данной задаче. В первом случае для системы сходящихся сил мы определяем искомые силы или другие неизвестные в данной задаче величины при помощи построения замкнутого силового многоугольника или чисто графически, строя этот многоугольник в строго определенном масштабе, или вычисляя его стороны и углы по правилам геометрии и тригонометрии. Во втором случае мы находим искомые величины, пользуясь методом проекций, из уравнений равновесия (13):

$$\sum X_k = 0, \quad \sum Y_k = 0.$$

При пользовании последним способом удобно за начало координат принимать ту точку, в которой сходятся силы, а координатные оси располагать так, чтобы проекции

сил на эти оси находились наиболее просто. Часто удобно бывает располагать одну из осей перпендикулярно к линии действия одной из неизвестных сил. В этом случае проекция этой неизвестной силы исключается из соответствующего уравнения равновесия и решение уравнений равновесия упрощается.

Первое время, до приобретения навыков в составлении уравнений равновесия, полезно значение проекций сил на координатные оси заносить в таблицу. Это облегчает проверку решения и отыскание возможной ошибки.

Задача 8. Между двумя стенами висит на веревках фонарь (рис. 33, а) весом $G = 20$ Н. Левая веревка образует со стеной угол $\alpha = 45^\circ$, а правая — угол $\beta = 30^\circ$. Найти натяжения обеих веревок.

Решение. В задаче требуется определить натяжения веревок. Вертки натягиваются фонарем. Вес фонаря известен. Активная сила

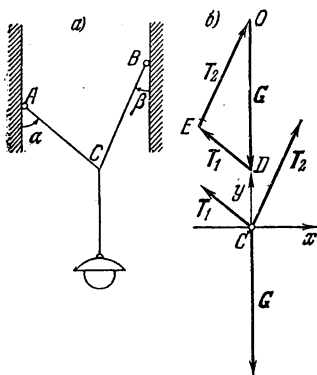


Рис. 33.

G , сила тяжести фонаря, действует на точку C . Эта точка несвободна, связи осуществляются веревками CA и CB . Рассмотрим равновесие точки C . Освободим эту точку от связей (перережем мысленно веревки) и заменим их действие реакциями. Тогда точку C можно будет рассматривать как свободную и находящуюся в равновесии под действием трех сил: активной G и реакций T_1 и T_2 веревок (рис. 33, б). Эти реакции численно равны искомым натяжениям веревок. Определение натяжений веревок можно заменить, следовательно, определением их реакций. Рассмотрим несколько способов решения данной задачи.

а) **Графический способ.**

Выбрав определенный масштаб, например 1 Н в 1 мм, откладываем в этом масштабе от произвольной точки O в направлении силы G вектор этой силы длиной в 20 мм (рис. 33, б), затем из начала O этого вектора проводим прямую OE , параллельную веревке BC , а из конца D — прямую DE , параллельную веревке CA . Так как все силы, приложенные к точке C , уравновешиваются, то полученный силовой треугольник ODE должен быть замкнут, т. е. все стрелки в нем должны идти в одну сторону по обходу треугольника. Стороны этого треугольника DE и EO дают модули и направления искомым реакций веревок. Чтобы найти их модули, а следовательно, и натяжения веревок, остается измерить в принятом масштабе длины стороны треугольника DE и EO .

б) **Геометрический способ.** Искомые стороны силового треугольника можно найти не только путем непосредственного измерения, но и вычислением. Из способа построения силового треугольника ODE ясно, что $\angle ODE = \alpha$ и $\angle EOD = \beta$ (рис. 33, а и б),

По теореме синусов имеем

$$\frac{T_1}{\sin \beta} = \frac{T_2}{\sin \alpha} = \frac{G}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{G}{\sin (\alpha + \beta)},$$

откуда

$$T_1 = \frac{G \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{20 \sin 30^\circ}{\sin (45^\circ + 30^\circ)} = \frac{20 \cdot 0,5}{0,966} \approx 10,4 \text{ Н},$$

$$T_2 = \frac{G \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{20 \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{20 \cdot 0,707}{0,966} \approx 14,7 \text{ Н}.$$

в) Аналитический способ. Возьмем начало координат в точке C , равновесие которой мы рассматриваем. Направим ось x горизонтально вправо, ось y — вертикально вверх (рис. 33, б). Из сравнения рис. 33, а и б видно, что углы $(T_1, y) = \alpha = 45^\circ$ и $(T_2, y) = \beta = 30^\circ$. Пользуясь формулой (6), находим значения проекций всех сил на выбранные координатные оси и заносим их для удобства в таблицу.

Сила	Проекции силы на оси	
	x	y
G	0	$-G$
T_1	$-T_1 \cos (90^\circ - \alpha) = -T_1 \cos 45^\circ$	$T_1 \cos 45^\circ$
T_2	$T_2 \cos (90^\circ - \beta) = T_2 \cos 60^\circ$	$T_2 \cos 30^\circ$

Уравнения равновесия (13) принимают в данном случае вид

$$\sum X_k = -T_1 \cos 45^\circ + T_2 \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y_k = -G + T_1 \cos 45^\circ + T_2 \cos 30^\circ = 0,$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707, \quad \cos 60^\circ = 0,5,$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 \text{ и } G = 20 \text{ Н}.$$

Подставляя найденные значения, получим

$$-0,707T_1 + 0,5T_2 = 0,$$

$$-2 + 0,707T_1 + 0,866T_2 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$T_2 = \frac{20}{1,366} = 14,6 \text{ Н}, \quad T_1 = \frac{0,5 \cdot 14,6}{0,707} = 10,3 \text{ Н}.$$

Как мы видим, данную задачу можно решить различными способами¹⁾. Выбор того или иного способа решения зависит от характера задачи и от требований, предъявляемых к точности решения. Геометрический способ при числе сил, большем трех, становится неудобным.

Задача 9. Стержни AB и BC (рис. 34, а) соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. Длина стержней: $AB = a$ и $BC = b$. Расстояние $AC = c$. Определить

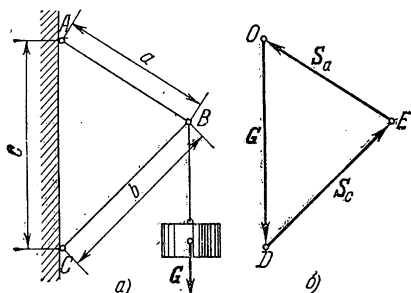


Рис. 34.

реакции стержней AB и BC на шарнирный болт B , если к нему подвешен груз весом G .

Решение. На шарнирный болт B действуют силы: направленная вниз вертикальная сила тяжести G груза и реакции S_a и S_c стержней AB и BC , направленные вдоль этих стержней. Так как точка B находится в равновесии под действием приложенной к ней системы сходящихся сил G , S_a и S_c , то построенный для этой системы силовой

многоугольник должен быть замкнутым. Строим этот многоугольник (рис. 34, б), откладывая (в каком-либо масштабе) из произвольной точки O вектор $\vec{OD} = G$ и проводя из его концов прямые OE и DE , параллельные

искомым реакциям, т. е. параллельные стержням AB и BC . Длины сторон OE и DE полученного силового треугольника дают в выбранном масштабе сил искомые модули реакций S_a и S_c . Для того чтобы вычислить их, проще всего воспользоваться вытекающей из подобия треугольников ODE и ACB пропорциональностью их сторон $S_a/a = S_c/b = G/c$, откуда

$$S_a = G \frac{a}{c} \quad \text{и} \quad S_c = G \frac{b}{c}.$$

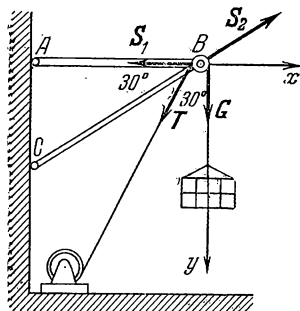


Рис. 35.

Задача 10. Груз весом $G = 20$ кН поднимается лебедкой (рис. 35) при помощи каната, перекинутого через неподвижный блок

в точке B . Пренебрегая трением в блоке и его размерами, определить усилия в брусках AB и BC . Углы указаны на рисунке.

Решение. Рассмотрим равновесие точки B оси неподвижного блока. Заменим наложенные на нее связи соответствующими реак-

¹⁾ Кроме разобранных способов, натяжения веревок можно было бы найти путем разложения силы G на составляющие по заданным направлениям веревок.

пиями. Так как бруски AB и BC нагружены в узле, а соединения брусков шарнирные, то бруски могут быть только или растянуты, или сжаты, и, следовательно, реакции брусков будут направлены вдоль их осей. Брусок AB будет, очевидно, растянут, и его реакция S_1 будет направлена от B к A , брусок BC сжат, и его реакция S_2 будет направлена от C к B . Модуль T реакции каната равен его натяжению, т. е. равен весу G груза, так как при отсутствии трения обе ветви каната должны быть натянуты одинаково.

Итак, к находящейся в равновесии точке B приложены четыре силы G , T , S_1 и S_2 , причем модули двух последних сил неизвестны и их требуется вычислить.

Удобнее всего это сделать способом проекций. За начало координат берем точку B , за направление оси x — линию действия одной из приложенных сил, S_1 , ось y проводим перпендикулярно к ней, как показано на рис. 35.

Проектируем все силы, приложенные в точке B , на выбранные координатные оси и составляем таблицу.

Сила	Проекция силы на ось		Сила	Проекция силы на ось	
	x	y		x	y
G	0	G	S_1	$-S_1$	0
T	$-T \cos 60^\circ$	$T \cos 30^\circ$	S_2	$S_2 \cos 30^\circ$	$-S_2 \cos 60^\circ$

Решая систему уравнений равновесия

$$\sum X_k = -T_2 \cos 60^\circ - T_1 + S \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum Y_k = G + T_2 \cos 30^\circ - S \cos 60^\circ = 0,$$

находим $S_2 = 74,6$ кН, $S_1 = 54,6$ кН.

Задача 11. Стержень AB (рис. 36, а) прикреплен к вертикальной стене при помощи шарнира A и удерживается под углом в 60° к стене при помощи веревки BC , образующей со стержнем также угол в 60° . Определить модуль и направление реакции шарнира, если известно, что вес стержня $G = 120$ Н приложен в его середине.

Решение. Рассматривая равновесие стержня AB , заменим наложенные на него связи (веревку BC и шарнир A) их реакциями. Реакция веревки T направлена вдоль веревки от B к C .

Направление реакции неподвижного шарнира A , как мы знаем (стр. 36, 37), вообще говоря, неопределенно. Но так как стержень под действием трех приложенных к нему непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих трех сил должны пересекаться в одной точке.

Продолжаем линию действия силы тяжести стержня до ее пересечения в точке D с линией действия реакции T натянутой веревки. Соединяя точку D с точкой A , получаем линию действия реакции R шарнира A . Зная модуль и направление силы G , принадлежащей к системе трех сил, сходящихся в точке D и находящихся в равновесии, а также зная направления двух других сил R и T , трудно найти модуль последних, строя силовой треугольник.

Решим данную задачу аналитически. Треугольник ABC , как это ясно из чертежа, является равносторонним.

Далее, так как линия действия силы тяжести G параллельна прямой AC и делит сторону AB треугольника ABC пополам, то она делит в точке D пополам и другую сторону, BC , этого треугольника. Следовательно, проходящая через точку D линия действия реакции R является для треугольника ABC медианой и в то же время, по

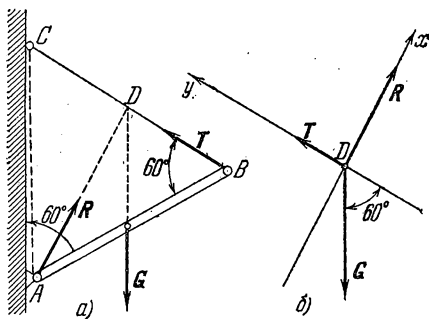


Рис. 36.

свойству всякого равнобедренного треугольника, высотой треугольника и биссектрисой угла BAC . Отсюда находим, что $\angle CAD = \angle DAB = 60^\circ/2 = 30^\circ$ и $\angle ADC = (\widehat{R, T}) = 90^\circ$. Для определения модуля реакции шарнира примем точку D за начало координат и проведем координатные оси так, как показано на рис. 36, б. Проектируя все сходящиеся в точке D силы на ось x и составляя соответствующее уравнение равновесия, получим $\sum X_k = R - G \cos 30^\circ = 0$, откуда $R = G \cos 30^\circ = 120 \cdot 0,866 \approx 104$ Н.

Проектируя силы на ось y , легко можно было бы найти и натяжение T веревки.

§ 17*. Общие сведения о фермах и их расчете.

Способ вырезания узлов

Фермами называются неизменяемые решетчатые конструкции, которые состоят из стержней, соединенных между собой по концам шарнирами.

Эти хрупкие на первый взгляд конструкции заменяют собой в сооружениях сплошные твердые тела при значительном сокращении веса сооружений и расхода материалов и имеют большое и разнообразное применение: в мостовых сооружениях, в перекрытиях зданий, в подъемных кранах, мачтах, самолетах и т. д.

Если оси всех стержней фермы и приложенные к ней силы лежат в одной плоскости, то ферма называется

плоской. Места соединений стержней фермы называются *узлами*.

Если бы стержни фермы были невесомы и соединялись между собой по концам при помощи идеальных шарниров, то, как мы знаем (стр. 40), при условии приложения нагрузок к узлам реакции этих стержней всегда были бы направлены вдоль их осей и стержни могли бы только растягиваться или сжиматься. При растяжении же и сжатии материал стержня, как это обосновывается в курсе сопротивления материалов, используется наиболее полно¹⁾. В действительности стержни обладают, конечно, весом и соединяются между собой не шарнирно, а наглухо при помощи сварки или заклепок. Вследствие этого в стержнях появляются дополнительные усилия. Но так как они невелики, то для простоты расчета ими пренебрегают и считают ферму состоящей из прямолинейных стержней, соединенных между собой в узлах идеальными шарнирами и, следовательно, работающих только на растяжение и сжатие. Получающаяся при этом неточность расчета вполне допустима для целей практики. При этом все силы (нагрузки), действующие на ферму, должны быть приложены в ее узлах.

На практике часто встречаются и нагрузки, распределенные вдоль стержней фермы (давление ветра, вес снега и т. д.). Обычно они невелики по сравнению с нагрузками, приложенными в узлах, и ими часто можно пренебречь, в противном случае их надо разложить на составляющие, приложенные в узлах.

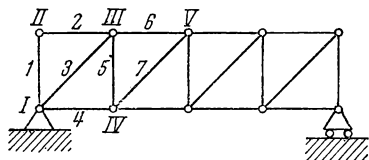


Рис. 37.

Для того чтобы ферма могла быть пригодной для сооружений, она должна представлять собой неизменяемую (или, как говорят, жесткую) систему.

Соединив между собой три стержня 1, 2 и 3 (рис. 37), мы получим простейшую неизменяемую систему: из-за наличия стержней узлы I, II и III не могут изменять своего взаимного расположения. Для присоединения

¹⁾ Этим и объясняется, почему всегда стремятся по возможности конструировать части машин и сооружений так, чтобы они работали на растяжение и сжатие, а не на изгиб.

к ним узла *IV* с сохранением жесткости достаточно уже двух стержней 4 и 5. Для присоединения к этой системе нового узла *V* также достаточно двух стержней 6 и 7 и т. д. Таким образом, если в ферме имеется n узлов, то для получения первых трех из них нужны три стержня, для получения же остальных $(n - 3)$ узлов необходимо $2(n - 3)$ стержня. Следовательно, общее количество стержней, необходимых для образования фермы с n узлами, будет

$$k = 3 + 2(n - 3),$$

или

$$k = 2n - 3. \quad (14)$$

Это — условие неизменяемости плоской системы шарнирно сочлененных концами стержней. При меньшем числе стержней система не будет жесткой. При большем числе стержней ферма будет *статически неопределимой*, т. е. для ее расчета недостаточно одних только методов статики¹⁾.

Произвести расчет фермы — это значит определить реакции опор фермы и усилия в ее стержнях, возникающие под действием приложенных к ферме нагрузок. Знание этих усилий необходимо при проектировании фермы для подбора стержней требуемой прочности.

Нагрузка на ферму и реакции ее опор являются для всей фермы в целом, рассматриваемой как абсолютно твердое тело, внешними силами; усилия же в ее стержнях будут внутренними силами. Эти усилия численно равны реакциям стержней на узлы фермы, и потому

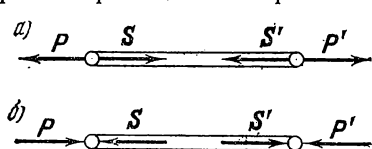


Рис. 38.

определение усилий в стержнях сводится к определению реакций этих стержней. Для определения же характера усилий заметим следующее.

Если (рис. 38, *a*) под влиянием действующих на стержень сил P и P' стержень растягивается, то его реакции S и S' , приложенные к противоположным узлам фермы, будут направлены вдоль стержня от узлов навстречу друг другу; если же стержень сжимается

¹⁾ Понятие о статически неопределенных задачах будет дано в § 34*.

(рис. 38, б), то его реакции будут направлены вдоль стержня друг от друга к узлам. Следовательно, зная направления реакций стержня, можно всегда определить, будет ли он растянут или сжат. *Если реакция стержня на данный узел направлена от узла внутрь стержня, то стержень растянут; если же реакция стержня на узел направлена от узла наружу, то стержень сжат.*

Ясно также (рис. 38), что реакции каждого стержня, приложенные к узлам, которые он соединяет, равны между собой по модулю и противоположны по направлению.

Расчет фермы обычно начинается с определения, графическим или аналитическим путем, реакций ее опор. Как это делается в общем случае, мы узнаем из дальнейшего изучения курса статики.

Для определения усилий в стержнях фермы существует ряд способов (как графических, так и аналитических). В основании одного из них, называемого *способом вырезания узлов*, лежат следующие соображения.

Если ферма в целом находится в равновесии, то в равновесии находится и каждая ее часть, любой ее узел. Мысленно вырезая какой-либо узел фермы, мы тем самым освобождаем данный узел от связей (стержней, соединяющих его с остальной частью фермы) и должны заменить эти связи реакциями соответствующих стержней на этот узел. Применяя затем к системе сил, сходящихся в том или ином узле, условия равновесия, мы получаем возможность определить реакции входящих в него стержней.

Последняя задача может решаться как аналитически (путем составления уравнений равновесия для сил, приложенных к отдельным узлам фермы), так и графически — построением замкнутого силового многоугольника.

Любое решение задачи на равновесие плоской системы сходящихся сил возможно лишь тогда, когда в ней имеется не более двух неизвестных. Поэтому начинать «вырезать» надо с того узла, в котором сходятся не более двух стержней (обычно такие стержни бывают на опорах), а потом уже переходить к следующим узлам, следя за тем, чтобы в очередном узле было не более двух стержней с неизвестными еще реакциями.

Задача 12. Определить реакции опор и усилия в стержнях фермы, изображенной в произвольном масштабе на рис. 39, а. Левая опора связана с фермой цилиндрическим шарниром A , а правая опора B стоит на катках, которые могут перемещаться по наклонной плоскости, расположенной под углом в 45° к горизонту. В узле E фермы приложена вертикальная сила $P = 60$ кН. Все стержни одинаковой длины. Весом их можно пренебречь.

Решение. К ферме приложена одна активная сила P и наложены две связи — опоры B и A . Освобождаемся от связей, заменяя их реакциями. Опора B стоит на катках, и потому ее реакция R_B ,

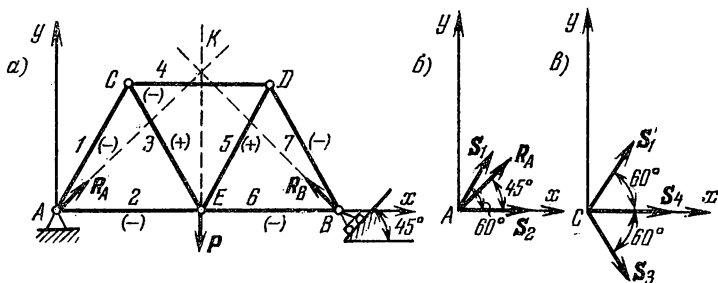


Рис. 39.

в соответствии со сказанным на стр. 38, перпендикулярна к опорной плоскости. Направление же реакции R_A неподвижного цилиндрического шарнира заранее неизвестно. Продолжаем линии действия сил P и R_B до пересечения их в некоторой точке K (рис. 39, а). По теореме о равновесии трех непараллельных сил линия действия реакции R_A , приложенной в точке A , должна также пройти и через общую точку K .

Нумеруем все стержни. Реакции стержней условимся обозначить буквой S с индексами, указывающими номер стержня.

Приводим далее аналитическое решение данной задачи.

Линии действия сил R_A и R_B проходят через точки A и B , отстоящие на равных расстояниях от линии действия силы P , и пересекаются в одной точке K , лежащей на этой линии. Следовательно, линия действия силы R_A образует с горизонталью тот же угол, что и линия действия силы R_B , т. е. угол в 45° .

Составляем уравнения равновесия фермы в целом под действием приложенных к ней внешних сил P , R_A и R_B . За оси проекций принимаем оси, указанные на рис. 39, а:

$$\sum X_k = R_A \cos 45^\circ - R_B \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y_k = R_A \cos 45^\circ - P + R_B \cos 45^\circ = 0.$$

Решая данную систему уравнений и подставляя значение силы $P = 60$ кН, находим $R_A = R_B = 42,4$ кН.

Для определения усилий в стержнях вырежем сначала узел A (рис. 39, а), в котором сходятся только два стержня 1 и 2 с неизвестными реакциями S_1 и S_2 и известная реакция R_A опоры A .

Предполагаем пока, что стержни растянуты, и потому их реакции на узел *A* направляем от этого узла внутрь соответствующих стержней (рис. 39, б).

Составляя и решая систему уравнений равновесия для сил, приложенных к узлу *A*, будем иметь

$$\sum X_k = S_1 \cos 60^\circ + R_A \cos 45^\circ + S_2 = 0,$$

$$\sum Y_k = S_1 \cos 30^\circ + R_A \cos 45^\circ = 0,$$

откуда $S_1 = -34,2$ кН, $S_2 = -12,6$ кН.

Отрицательные значения, полученные для реакций S_1 и S_2 , показывают, что в действительности направления реакций стержней 1 и 2 противоположны направлениям, принятым нами при составлении уравнений равновесия и, следовательно, стержни 1 и 2 не растянуты, а сжаты.

Теперь можно перейти к следующему узлу, но обязательно к такому, в котором было бы не больше двух стержней с неизвестными пока еще реакциями. Таким узлом будет узел *C* (рис. 39, а). В нем сходятся три силы: найденная уже по модулю реакция S'_1 стержня 1 и неизвестные реакции S_3 и S_4 стержней 3 и 4. Мы выяснили, что стержень 1 сжат, следовательно, реакции этого стержня на узлы должны быть направлены от узлов наружу. Следовательно, реакция S'_1 стержня 1 на узел *C* должна быть направлена так, как показано на рис. 39, в. Стержни 3 и 4 мы опять пока предполагаем растянутыми и потому их реакции на узел *C* направляем от этого узла внутрь соответствующих стержней.

Уравнения равновесия для сил, приложенных к узлу *C* (рис. 39, в), имеют вид

$$\sum X_k = S'_1 \cos 60^\circ + S_4 + S_3 \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y_k = S'_1 \cos 30^\circ - S_3 \cos 30^\circ = 0.$$

Решая данную систему уравнений и подставляя значение $S'_1 = -S_1 = 34,2$ кН, находим $S_3 = S'_1 = 34,2$ кН и $S_4 = -34,2$ кН.

Отрицательное значение, полученное для реакции S_4 стержня 4, показывает, что направление этой реакции противоположно предварительно принятому, и, следовательно, этот стержень сжат. Положительное значение, полученное для реакции S_3 стержня 3, подтверждает, что этот стержень растягивается.

Найдя значения реакций стержней 2 и 3, можно было бы перейти к рассмотрению равновесия узла *E*, к которому кроме этих сил и силы *P* приложены еще две неизвестные силы — реакции стержней 5 и 6. Затем перейти к рассмотрению равновесия узла *D*, к которому приложены уже ставшие известными реакции стержней 4 и 5 и неизвестная реакция стержня 7. Но в данной задаче этого можно и не делать. Вследствие симметричности фермы и симметричного расположения приложенных к ней внешних сил *P*, *R_A* и *R_B* очевидно, что $S_5 = S_3 = 34,2$ кН, $S_6 = S_2 = -12,6$ кН и $S_7 = S_1 = -34,2$ кН.

На рис. 39, а растянутые стержни отмечены знаком плюс (+), а сжатые знаком минус (—).

ГЛАВА III

СИСТЕМА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

§ 18. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Правило параллелограмма сил для сложения параллельных сил непосредственно неприменимо, так как точка пересечения параллельных сил лежит в бесконечности.

Для того чтобы вывести правило сложения двух параллельных сил, заменим эти силы эквивалентной системой двух сходящихся сил.

Рассмотрим сначала систему двух параллельных сил P_1 и P_2 , направленных в одну сторону (рис. 40). В точках приложения этих сил ¹⁾ A и B приложим две равные по модулю силы T_1 и T_2 , направленные в противоположные стороны по прямой AB . Сложив теперь по правилу параллелограмма силу P_1 с силой T_1 и силу P_2 с силой T_2 , получим две сходящиеся силы R_1 и R_2 . Перенесем силы R_1 и R_2 вдоль их линий действия в точку O пересечения этих линий. Для определения модуля и линии действия равнодействующей данных сил произведем теперь обратные действия: силу R_1 разложим на две составляющие P'_1 и T'_1 , параллельные силам P_1 и T_1 , а силу R_2 — на две составляющие P'_2 и T'_2 , параллельные силам P_2 и T_2 . Из попарного равенства параллелограммов, построенных при точках A , B и O , следует, что полученные составляющие P'_1 , T'_1 , P'_2 и T'_2 соответственно равны по модулю силам P_1 , T_1 , P_2 и T_2 . Таким образом, система

¹⁾ За точки приложения сил можно взять любые точки на линиях их действия.

двух параллельных сил свелась к системе четырех сил, приложенных к одной точке O .

Равные по модулю и направленные по одной прямой в противоположные стороны силы T'_1 и T'_2 взаимно уравниваются, и их можно отбросить. Остаются две силы P'_1 и P'_2 , направленные по одной прямой в одну сторону. Их равнодействующая R_P направлена по той

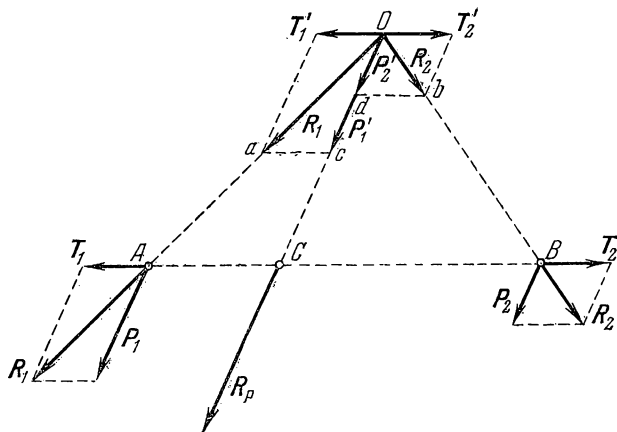


Рис. 40.

же прямой, параллельной линиям действия данных сил, в ту же сторону и по модулю равна их сумме:

$$R_P = P_1 + P_2. \quad (15)$$

Найдем теперь положение линии действия равнодействующей, для чего определим положение точки C пересечения этой линии с прямой AB .

Из подобия треугольников OAC и Oac следует $AC/OC = ac/Oc$, или, принимая во внимание пропорциональность сторон силового треугольника модулям соответствующих сил, получим

$$\frac{AC}{OC} = \frac{T_1}{P_1}.$$

Из подобия же треугольников OCB и Odb следует

$$\frac{CB}{OC} = \frac{db}{Od}, \quad \text{или} \quad \frac{CB}{OC} = \frac{T_2}{P_2}.$$

Разделив первую пропорцию на вторую и принимая во внимание, что $T_1 = T_2$, получим

$$\frac{AC}{CB} = \frac{P_2}{P_1}. \quad (16)$$

Формулу (16) можно представить и в другом виде:

$$\frac{P_2}{AC} = \frac{P_1}{CB} = \frac{P_1 + P_2}{AC + CB} = \frac{R_P}{AB}. \quad (16a)$$

Следовательно, точка C делит прямую AB на части, обратно пропорциональные составляющим силам, и мы, таким образом, приходим к правилу: *равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, им параллельна, направлена в ту же сторону и равна по модулю их сумме; линия действия равнодействующей лежит между линиями действия составляющих сил на расстояниях от них, обратно пропорциональных модулям этих сил.*

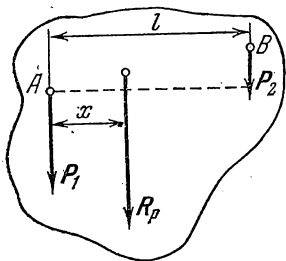


Рис. 41.

Задача 13. К телу в точках A и B (рис. 41) приложены две параллельные и направленные в одну сторону силы $P_1 = 50$ Н и $P_2 = 30$ Н. Определить модуль и линию действия равнодействующей, если расстояние между линиями действия данных сил $l = 1,6$ м.

Решение. Модуль равнодействующей $R_P = P_1 + P_2 = 80$ Н. Расстояние линии действия равнодействующей R_P от линии действия силы P_1 обозначим через x . По формуле (16a) $\frac{P_2}{x} = \frac{R_P}{l}$, откуда находим $x = \frac{P_2 l}{R_P} = \frac{30 \cdot 1,6}{80} = 0,6$ м.

§ 19. Сложение двух не равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны

Пусть мы имеем две направленные в противоположные стороны, не равные по модулю¹⁾ параллельные силы P_1 и P_2 (рис. 42), причем $P_1 > P_2$. Проведем преобразование, подобное предыдущему. К точкам прило-

¹⁾ Случай равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, будет рассмотрен в следующей главе.

жения данных сил A и B приложим две равные по модулю силы T_1 и T_2 , направленные в противоположные стороны по прямой AB . Сложим силу P_1 с силой T_1 , а силу P_2 с силой T_2 и перенесем полученные равнодействующие R_1 и R_2 вдоль их линий действия в точку O пересечения этих линий.

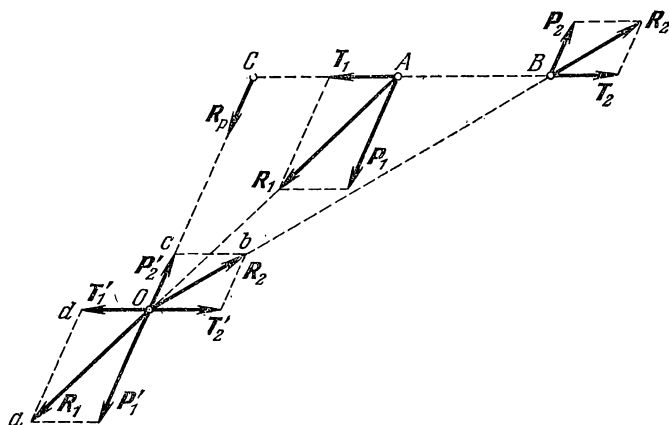


Рис. 42.

Произведем теперь разложение сил R_1 и R_2 на составляющие P'_1 , T'_1 , P'_2 и T'_2 , соответственно равные по модулю и направлению силам P_1 , T_1 , P_2 и T_2 ; так как силы T'_1 и T'_2 взаимно уравновешиваются, получим две силы P'_1 и P'_2 , направленные по одной прямой в противоположные стороны. Их равнодействующая R_P направлена по той же прямой, параллельной линиям действия данных сил, в сторону большей силы и по модулю равна их разности:

$$R_P = P_1 - P_2. \quad (17)$$

Положение точки C пересечения линий действия равнодействующей R_P с прямой AB определяется из подобия соответствующих треугольников.

Из подобия треугольников OAC и aOd следует

$$\frac{CA}{OC} = \frac{Od}{ad}, \quad \text{или} \quad \frac{CA}{OC} = \frac{T_1}{P_1}.$$

Из подобия же треугольников OCB и Ocb следует

$$\frac{CB}{OC} = \frac{cb}{Oc}, \quad \text{или} \quad \frac{CB}{OC} = \frac{T_2}{P_2}.$$

Разделив первую пропорцию на вторую и принимая во внимание, что $T_1 = T_2$, получим

$$\frac{CA}{CB} = \frac{P_2}{P_1}. \quad (18)$$

Формулу (18) также можно представить в другом виде:

$$\frac{P_1}{CB} = \frac{P_2}{CA} = \frac{P_1 - P_2}{CB - CA} = \frac{R_P}{AB}. \quad (19)$$

Таким образом, получаем следующее правило: *равнодействующая двух не равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, им параллельна, направлена в сторону большей силы и равна по модулю их разности; линия действия равнодействующей лежит за большей силой на расстоянии от линии действия составляющих сил, обратно пропорциональных модулям этих сил.*

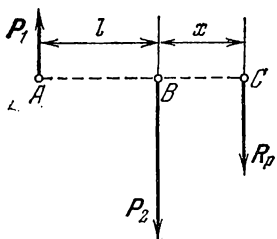


Рис. 43.

Задача 14. Определить модуль и положение равнодействующей двух параллельных сил $P_1 = 10$ Н и $P_2 = 25$ Н, направленных в противоположные стороны (рис. 43), если расстояние между их линиями действия $l = 30$ см.

Решение. Модуль равнодействующей $R_P = P_2 - P_1 = 25 - 10 = 15$ Н. Равнодействующая лежит за большей силой и направлена в сторону большей силы. Обозначим расстояние линии действия равнодействующей R_P от линии действия большей силы через x .

По правилу сложения двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны (формула (19)), будем иметь

$$\frac{P_1}{x} = \frac{R_P}{l}, \text{ откуда } x = \frac{P_1 l}{R_P} = \frac{10 \cdot 30}{15} = 20 \text{ см.}$$

§ 20. Разложение силы на две параллельные ей составляющие

Разложение есть действие, обратное сложению, и его можно производить при помощи формул, установленных в предыдущих параграфах. При разложении силы на две параллельные ей составляющие как в случае, когда эти составляющие направлены в одну сторону, так и в случае, когда они направлены в противоположные стороны, мы будем иметь два уравнения (формулы (15)),

(16) или (17), (18)), в которые будут входить четыре неизвестные величины: модули двух составляющих и расстояния линий их действия от линии действия равнодействующей. Поэтому данная задача, как и задача разложения силы на сходящиеся составляющие, в общей постановке является задачей неопределенной. Для определенности задачи нужно иметь два дополнительных условия.

Нужно, например, знать: 1) расстояния линий действия искомых составляющих P_1 и P_2 до линии действия данной силы, или 2) модуль одной из составляющих сил и расстояние ее линии действия до линии действия данной силы, или 3) модуль одной из искомых составляющих сил и расстояние от линии действия данной силы до линии действия другой искомой составляющей силы. Рассмотрим наиболее часто встречающийся первый случай.

Пусть данную силу P , приложенную в точке C (рис. 44), требуется разложить на две составляющие, направленные по прямым I и II , параллельным линии действия данной силы. Проведем через точку C какую-нибудь прямую, пересекающую первую и вторую прямые в точках A и B ; эти точки можно принять за точки приложения искомых составляющих P_1 и P_2 . Так как сила P должна быть равнодействующей параллельных сил P_1 и P_2 , то последние должны удовлетворять следующему уравнению:

$$P_1 + P_2 = P \quad \text{и} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{CB}{AC} = \frac{b}{a}.$$

Решая данную систему уравнений, находим модули P_1 и P_2 искомых составляющих сил, линии действия которых, через расстояния a и b , заданы.

Совершенно так же эта задача решается и в том случае, когда точка приложения заданной силы P находится не между линиями действия искомых составляющих, а за одной из них. В этом случае искомые составляющие будут направлены в противоположные стороны и сила P будет по модулю равна модулю их разности.

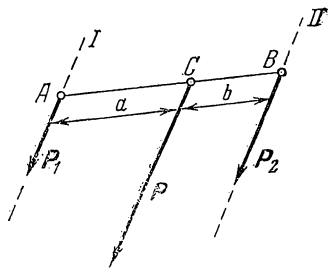


Рис. 44.

Задача 15. К стержню AB , подвешенному на двух параллельных веревках AE и BD , подвешен к точке C груз весом $G = 80$ Н (рис. 45). Определить натяжения веревок, если $AC = 30$ см и $BC = 50$ см. Собственным весом стержня пренебречь.

Решение. Так как веревки параллельны силе тяжести груза G , то задача сводится к разложению этой силы на две параллельные составляющие, приложенные в точках A и B . Обозначая натяжения веревок соответственно через T_A и T_B , находим по формуле (16а):

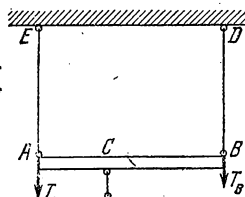


Рис. 45.

$$\frac{T_A}{BC} = \frac{T_B}{AC} = \frac{G}{AB};$$

отсюда получаем

$$T_A = \frac{G \cdot BC}{AB} = \frac{80 \cdot 50}{80} = 50 \text{ Н},$$

$$T_B = \frac{G \cdot AC}{AB} = \frac{80 \cdot 30}{80} = 30 \text{ Н}.$$

Задача 16. К балке, лежащей на стойках A и B (рис. 46), требуется подвесить груз $G = 30$ кН. Расстояние между стойками $l = 6$ м. В какой точке C нужно подвесить груз, чтобы нагрузка на менее прочную стойку A не превышала 6 кН?

Решение. Если давление на стойку A примем равным $P_1 = 6$ кН, то давление P_2 на стойку B определится из равенства $G = P_1 + P_2$, откуда $P_2 = G - P_1 = 30 - 6 = 24$ кН.

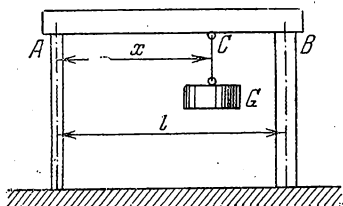


Рис. 46.

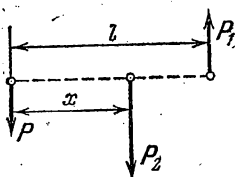


Рис. 47.

Таким образом, модули параллельных составляющих, на которые разлагается сила G , нам известны. В этом случае расстояние x точки приложения равнодействующей G от точки A определится из пропорции

$$\frac{P_2}{x} = \frac{G}{l},$$

откуда

$$x = \frac{l P_2}{G} = \frac{6 \cdot 24}{30} = 4,8 \text{ м}.$$

Задача 17. Силу $P = 300$ Н разложить на две параллельные составляющие P_1 и P_2 , причем одна из них, $P_1 = 420$ Н, направлена противоположно силе P и ее линия действия проходит на расстоянии $l = 6$ м от линии действия данной силы (рис. 47).

Решение. Так как силы P и P_1 направлены в разные стороны, то мы, очевидно, имеем дело с разложением силы на две параллельные составляющие, направленные противоположно. Равнодействующая двух таких сил проходит вне этих сил за большей силой и направлена в ее сторону. Следовательно, искомая вторая составляющая P_2 должна иметь одно направление с силой P . Обозначим расстояние между линиями действия этой силы и данной силы P через x . Это расстояние, так же как и модуль силы P_2 , определяется из уравнений (17) и (18):

$$P = P_2 - P_1 \quad \text{и} \quad \frac{x}{l} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$P_2 = P + P_1 = 300 + 420 = 720 \text{ Н},$$

$$x = \frac{lP_1}{P_2} = \frac{6 \cdot 420}{720} = 3,5 \text{ м}.$$

ГЛАВА IV
ТЕОРИЯ ПАР НА ПЛОСКОСТИ.
МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

§ 21. Пара сил

Чтобы иметь возможность на основании аксиом статики вывести правила сложения двух параллельных сил, направленных как в одну, так и в противоположные стороны, мы заменяли эти параллельные силы эквивалентными им системами сходящихся сил.

В случае, если две противоположно направленные параллельные силы равны по модулю, подобная замена невозможна.

В самом деле, как это ясно из рис. 42, если модули сил P_1 и P_2 равны, то, прибавляя к ним две любые равные по модулю и противоположно направленные силы T_1 и T_2 , мы всегда будем вновь получать параллельные, а не сходящиеся силы R_1 и R_2 .

Тот факт, что установленное выше (§ 19) правило нахождения равнодействующей двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны, неприменимо для случая, когда эти силы равны по модулю, можно установить и при помощи равенства, вытекающего из формулы (19):

$$CA = \frac{P_2 \cdot AB}{R_p}.$$

Если модуль силы P_2 будет неограниченно приближаться к модулю силы P_1 , то модуль равнодействующей этих сил $R_p = P_1 - P_2$ будет стремиться к нулю, а точка C ее приложения будет уходить в бесконечность, так как расстояние AC при этом неограниченно возрастает.

Отсюда следует, что в действительности нет ни самой равнодействующей подобной системы сил, ни какой-либо точки на конечном расстоянии, где эта равнодействующая могла бы быть приложена.

Геометрическая сумма двух равных и противоположно направленных сил всегда равна нулю, но такие две силы уравниваются, на основании первой аксиомы статики, только тогда, когда они действуют по одной прямой, в данном же случае они имеют различные линии действия¹⁾. Так как во всех других случаях две параллельные силы, как и силы, сходящиеся в одной точке, всегда могут быть заменены одной равнодействующей, то данная система сил занимает среди других систем особое место и носит особое название. Система двух равных по модулю и противоположных по направлению параллельных сил называется парой сил или просто парой.

Пара сил не имеет равнодействующей и не может быть уравновешена одной силой. Последнее вытекает из того, что если бы пара уравнивалась одной силой, то она имела бы и равнодействующую. На основании второго следствия из аксиом статики уравнивающая сила, взятая в обратном направлении, являлась бы для данной пары равнодействующей.

Опыт показывает, что пара, действуя на твердое тело, стремится сообщить ему вращательное движение; если этому не препятствуют наложенные на тело связи. Пару можно отыскать везде, где приложенные силы стремятся сообщить телу вращательное движение.

Так, например, для сообщения вращательного движения винту пресса (рис. 48) действуют на его рукоятку силами P и P' , равными по модулю, параллельными и направленными в противоположные стороны. При этом, как это ясно из повседневного опыта, при показанном

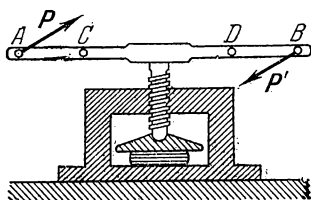


Рис. 48.

¹⁾ Важно заметить себе для дальнейшего, что для равновесия сил, вообще говоря, недостаточно равенства нулю их геометрической суммы (этого вполне достаточно лишь для системы сходящихся сил).

на рис. 48 приложении сил в точках A и B рукоятки потребуется для зажима пресса меньшая их величина, чем в том случае, когда эти усилия будут приложены в более близких друг к другу точках C и D .

Таким образом, вращательный эффект пары зависит как от модуля ее сил, так и от расстояния между линиями их действия и определяется так называемым моментом пары.

Абсолютное численное значение момента пары равно произведению модуля одной из сил пары на ее плечо, т. е. на кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары (рис. 49, а).

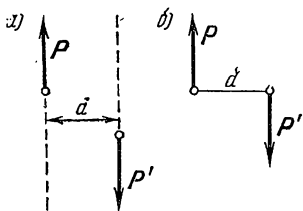


Рис. 49.

Так как силу можно переносить в любую точку по линии ее действия, то мы в дальнейшем всегда будем изображать силы пары так (рис. 49, б), чтобы прямая, соединяющая их точки приложения, была перпендикулярна

к линиям действия сил, т. е. являлась бы в то же время и плечом пары.

Плоскость, в которой расположена данная пара, называется плоскостью действия этой пары.

Действие пары на тело зависит от: 1) абсолютного численного значения момента пары, 2) положения в пространстве плоскости действия пары и 3) направления вращения пары в плоскости ее действия. Так, если бы силы, действующие на рукоятку пресса, изображенного на рис. 48, были направлены в противоположные стороны, то вместо того, чтобы ввинчиваться (при правой резьбе) в неподвижную гайку и сжимать тело, винт вывинчивался бы.

Для случая плоской системы сил, т. е. для случая, когда линии действия всех сил, приложенных к телу, лежат в одной плоскости, отпадает необходимость в указании положения плоскости действия пар, входящих в состав системы, и момент пары рассматривают как скалярную алгебраическую величину.

Алгебраической величиной момента пары называется взятое со знаком плюс или минус абсолютное численное значение момента пары. Обозначая алгебраическую величину момента пары буквой m , а плечо пары — буквой

d , имеем

$$m = \pm P \cdot d. \quad (20)$$

При этом момент пары считается положительным, если пара стремится вращать тела в направлении, противоположном ходу стрелки часов, и отрицательным, если пара стремится повернуть тело по ходу стрелки часов. Так, например, пара (P, P') ¹⁾, изображенная на рис. 49, имеет отрицательный момент, а пара (P_1, P'_1) , изображенная на рис. 50, имеет положительный момент.

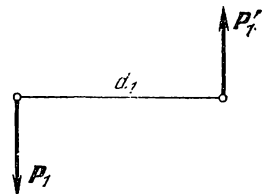


Рис. 50.

Момент пары имеет, очевидно, размерность силы, умноженной на размерность длины. Так, если сила измеряется в ньютонах, а плечо — в метрах, то момент пары будет измеряться в ньютон-метрах (Н·м).

§ 22. Момент силы относительно точки (центра)

Возникновение понятия момента силы относительно точки связано с задачей о рычаге.

Пусть к стержню (рис. 51) приложена сила P , лежащая в плоскости, перпендикулярной к неподвижной оси вращения стержня. Из опыта известно, что стержень будет при этом вращаться.

Выше (стр. 83) мы говорили, что во всех случаях, когда тело совершает вращательное движение, можно отыскать пару сил, сообщающую ему это вращение.

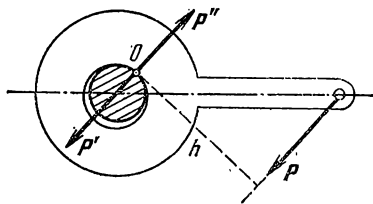


Рис. 51.

Стержень будет прижиматься в некоторой точке O к неподвижной оси и давить на нее с силой P' , равной по модулю и параллельной силе P . Действие же всегда равно противодействию и потому со стороны оси, в этой же точке, к стержню будет приложена сила P'' ,

¹⁾ Так часто обозначают пару, заключая образующие ее силы в скобку.

равная по модулю силе P' . Таким образом, на стержень будет действовать пара (P, P'') , которая и сообщает ему вращение вокруг неподвижной оси. Момент этой пары принято называть *моментом силы P относительно точки O* .

Так как *момент силы относительно какой-либо точки является по существу моментом пары*, возникающей при вращении тела вокруг этой точки, то он определяется по правилам, совершенно аналогичным правилам для момента пары.

Алгебраическая величина момента силы относительно какой-либо точки равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на ее плечо, т. е. на длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы.

Понятие о моменте силы относительно точки является одним из важнейших понятий механики. Обобщая это понятие, можно находить момент силы относительно любой точки, независимо от того, может ли в действительности тело вращаться вокруг этой точки.

Точку, относительно которой определяют момент силы, называют часто центром момента.

Обозначая момент силы P относительно центра O символом $m_O(P)$ и плечо относительно данного центра буквой h , будем иметь

$$m_O(P) = \pm Ph. \quad (21)$$

Тот или другой знак в последней формуле берется по следующему, аналогичному с правилом знаков для алгебраической величины момента пары, правилу: *если сила стремится повернуть тело вокруг центра моментов в направлении, противоположном ходу стрелки часов, то момент считается положительным, если по ходу стрелки часов — то отрицательным.*

Так, например, момент силы P относительно точки O (рис. 51)

$$m_O(P) = m(P, P'') = -Ph.$$

Для силы P_1 (рис. 52) будем иметь $m_{O_1}(P_1) = P_1 h_1$, для силы P_2 имеем $m_{O_1}(P_2) = -P_2 h_2$. Нужно отметить, что момент одной и той же силы может иметь и положительное и отрицательное значение в зависимости от взаимного расположения силы и центра моментов, т. е. той точки, относительно которой берется момент. Так, на-

пример (рис. 52), момент силы P_2 относительно точки O_1 равен $m_{O_1}(P_2) = -P_2 h_2$, а момент той же силы относительно точки O_2 равен $m_{O_2}(P_2) = P_2 h'_2$.

Заметим также, что момент силы относительно точки, так же как и момент пары, можно принимать за скалярную алгебраическую величину лишь в тех задачах, в которых мы имеем дело с силами, лежащими в одной плоскости¹⁾.

Момент силы имеет, очевидно, размерность силы, умноженной на длину, т. е. измеряется в тех же единицах, что и момент пары.

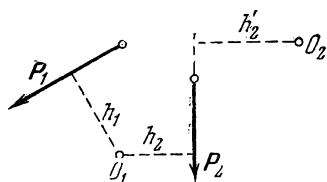


Рис. 52.

Из определения момента силы относительно точки следует:

1) момент силы относительно данной точки не изменится при переносе силы вдоль ее линии действия, так как при этом не изменяется ни модуль силы, ни ее плечо²⁾;

2) момент силы относительно данной точки равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку, так как в этом случае равно нулю плечо силы.

§ 23. Свойства пар

Теорема 1. *Алгебраическая величина момента пары равна сумме алгебраических величин моментов сил, составляющих пару, относительно любой точки, лежащей в плоскости действия данной пары.*

Доказательство. Рассмотрим пару (P, P') с плечом $ab = d$ (рис. 53). Момент этой пары $m = Pd$. Возьмем за центр моментов произвольную точку O , лежащую в плоскости действия данной пары; тогда мы будем

¹⁾ В случае сил, лежащих в различных непараллельных плоскостях, правило знаков теряет свой смысл и моменты силы относительно точки, как и моменты пар, рассматриваются как векторы.

²⁾ Необходимо хорошо уяснить себе, что плечом силы является длина перпендикуляра, опущенного из центра моментов на линию действия силы, а не длина отрезка, соединяющего центр моментов с точкой приложения силы (как это иногда представляют себе некоторые учащиеся).

иметь

$$m_O(\mathbf{P}) = P \cdot Ob,$$

$$m_O(\mathbf{P}') = -P' \cdot Oa.$$

Складывая эти равенства и принимая во внимание, что $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ и $ab = d$, получим

$$m_O(\mathbf{P}) + m_O(\mathbf{P}') = P \cdot Ob - P' \cdot Oa = P(Ob - Oa) = \\ = P \cdot ab = Pd = m(\mathbf{P}, \mathbf{P}').$$

Сумма моментов сил пары не зависит, следовательно, от выбора центра моментов. Она равна постоянной для данной пары величине — моменту этой пары, характеризующему вращательное действие пары на тело.

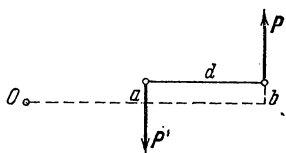


Рис. 53.

Теорема 2. Всякую пару, не изменяя ее действия на абсолютно твердое тело, можно заменить другой парой, расположенной как угодно в той же плоскости и имеющей одинаковую с данной парой алгебраическую величину момента.

Доказательство. Пусть на тело действует пара $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}'_1)$ с плечом $AB = d$ (рис. 54). Приложим к точкам

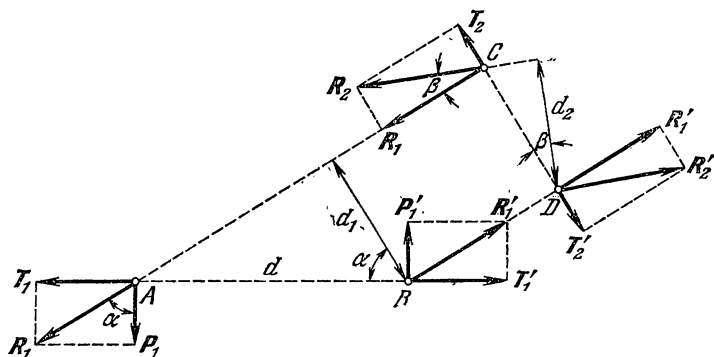


Рис. 54.

А и В две равные по модулю и направленные по одной прямой в противоположные стороны силы \mathbf{T}_1 и \mathbf{T}'_1 . Складывая попарно силы \mathbf{P}_1 и \mathbf{T}_1 и силы \mathbf{P}'_1 и \mathbf{T}'_1 , мы, очевидно, приходим к новой паре $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}'_1)$. Так как система сил $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}'_1)$ уравновешенная, то полученная пара $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}'_1)$ эквивалентна данной.

Если перенести силы этой пары в любые другие две точки, лежащие на линиях их действия (например, C и D , рис. 54), и вновь присоединить к силам данной пары любую уравновешенную систему сил T_2 , T'_2 , то получим пару (R_2, R'_2) , эквивалентную данной:

$$(P_1, P'_1) \propto (R_1, R'_1) \propto (R_2, R'_2).$$

Нетрудно убедиться в том, что все полученные эквивалентные пары имеют одинаковое направление вращения (в данном случае противоположное ходу стрелки часов) и одинаковый по абсолютному значению момент.

В самом деле, как это видно из рис. 54, $R_1 = P_1/\cos \alpha$, $d_1 = d \cos \alpha$ и, следовательно, $R_1 d_1 = P_1 d$,

$$R_2 = \frac{R_1}{\cos \beta}, \quad d_2 = d_1 \cos \beta \quad \text{и} \quad R_2 d_2 = R_1 d_1.$$

Переносом сил пары по линиям их действия и повторением операций, подобных сделанным выше, можно, очевидно, перенести пару в любое положение в плоскости ее действия, и любым образом изменять модули сил пары. При этом будет соответственно изменяться длина плеча пары, но абсолютное значение момента пары и направление ее вращения будут оставаться неизменными.

Перенесением пары в ее плоскости часто пользуются на практике. Так, например, шофер, управляя машиной, поворачивает рулевое колесо обеими руками с одинаковыми усилиями, т. е. действует на него парой сил. При этом он может схватиться за колесо в любых противоположных по диаметру местах. Действие пары от этого не изменяется, и для поворота во всех случаях потребуются одинаковые усилия.

Нужно заметить, что перенос пары в ее плоскости действия, так же как и перенос силы по линии ее действия, безоговорочно применим лишь для абсолютно твердого тела. Мы можем пользоваться этим свойством пары при решении задач на равновесие внешних сил, приложенных и к деформируемому телу, так как это равновесие не нарушается от того, что такое тело станет абсолютно твердым (принцип отвердевания). Но деформация тела и возникающие в результате ее в теле внутренние силы, противодействующие этой деформации,

зависят от места расположения пары, и потому в задачах сопротивления материалов всегда указывают сечение тела, на которое действует пара.

На рис. 55 в качестве примера изображены две балки, заделанные одним своим концом в стену и нагруженные парами. Ясно, что пара, приложенная к концевому сечению (рис. 55, а), будет деформировать (изгибать) всю балку, тогда как пара, приложенная к среднему сечению (рис. 55, б), будет изгибать только левую часть балки.

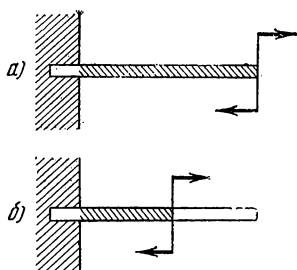


Рис. 55.

Из доказанной теоремы следует, что *действие пары на тело вполне определяется ее моментом.*

Одному и тому же моменту может соответствовать бесчисленное множество различных пар, но все пары с одинаковым моментом эквивалентны по своему механическому эффекту и могут быть заменены любой из них.



Рис. 56.

Поэтому в задачах механики обычно задается момент пары, а не модуль сил пары и плечо. При этом часто пару сил изображают (рис. 56) стрелкой, указывающей направление вращения, не изображая ни сил пары, ни ее плеча. Около стрелки пишется модуль m момента.

§ 24. Сложение пар. Условие равновесия пар

Как уже говорилось выше, пара есть такая система сил, которая не может быть упрощена, т. е. заменена одной силой. Поэтому в статике наряду с силой приходится рассматривать пару сил как самостоятельный, неприводимый элемент. Пары можно подобно силам складывать и разлагать. (Пара, действие которой на тело заменяет собой действие на него всех данных пар, вместе взятых, называется *результатирующей парой*, а данные пары — *ее составляющими*.)

Теорема. *Несколько пар, лежащих в одной плоскости, можно заменить одной результирующей парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов составляющих пар.*

Доказательство. Пусть на тело действуют три произвольно расположенные в плоскости чертежа пары с моментами m_1 , m_2 и m_3 . Направления вращения этих пар показаны на рис. 57, а стрелками. Возьмем за плечо произвольный отрезок $AB = d$ и приведем все данные пары к этому плечу, т. е. заменим данные пары эквивалентными им парами (P_1, P'_1) , (P_2, P'_2) и (P_3, P'_3) с плечом d . Модули сил этих пар определяются из условия равенства моментов эквивалентных пар:

$$P_1 = \frac{|m_1|}{d}, \quad P_2 = \frac{|m_2|}{d} \quad \text{и} \quad P_3 = \frac{|m_3|}{d}.$$

Пользуясь тем, что пару можно переносить в любое положение в ее плоскости, переместим новые пары в плоскости чертежа так, чтобы их плечи совпадали с отрезком AB .

Все силы окажутся после этого расположенными на двух прямых, перпендикулярных к отрезку AB и проходящих через его концы A и B (рис. 57, б). Сложив все силы, направленные по прямой, проходящей через точку A , получим равнодействующую, модуль которой $R_P = P_1 + P_3 - P_2$.

Точно так же, сложив все силы, направленные по прямой, проходящей через точку B , получим вторую равнодействующую, модуль которой $R'_P = P'_1 + P'_3 - P'_2$.

Ясно, что силы R_P и R'_P составляют пару. Таким образом, три данные пары приводятся к одной результирующей паре (R_P, R'_P) , показанной на рис. 57, в.

Момент результирующей пары

$$\begin{aligned} m(R_P, R'_P) &= R_P d = (P_1 + P_3 - P_2) d = \\ &= P_1 d + P_3 d + (-P_2 d) = m_1 + m_3 + m_2. \end{aligned}$$

Момент m_2 второй пары отрицателен, так как ее вращение направлено по часовой стрелке. Следовательно,

$$m(R_P, R'_P) = \sum m(P_k, P'_k). \quad (22)$$

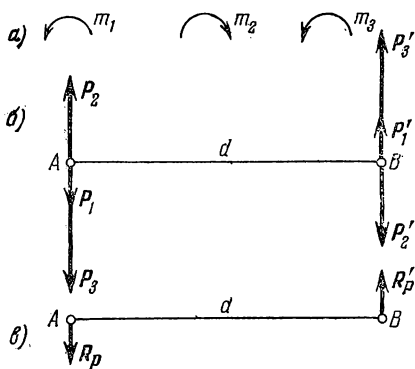


Рис. 57.

Доказанная теорема, как видно из хода доказательства, справедлива для любого числа составляющих пар.

Следствие. Для равновесия пар, расположенных в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов всех данных пар равнялась нулю, т. е. условием равновесия пар является равенство

$$\sum m(\mathbf{P}_k, \mathbf{P}'_k) = 0. \quad (23)$$

В самом деле, твердое тело под действием одной пары находится в равновесии, если либо силы пары равны нулю, либо плечо пары равно нулю, т. е. пара образована двумя силами, равными по величине и действующими по одной прямой в разные стороны. И в том и в другом случае момент пары равен нулю; поэтому для того, чтобы тело под действием одной пары было в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы момент этой пары равнялся нулю. Но любая плоская система пар, как только что было доказано, может быть заменена одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов данных пар. Отсюда и вытекает указанное следствие.

Задача 18. В одной плоскости действует пять пар сил. Направление вращения трех пар $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}'_1)$, $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}'_2)$ и $(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}'_3)$ с плечами, соответственно равными 0,75 м, 0,4 м и 0,2 м, совпадает с направлением вращения часовой стрелки, а направление вращения двух остальных пар $(\mathbf{P}_4, \mathbf{P}'_4)$ и $(\mathbf{P}_5, \mathbf{P}'_5)$ с плечами 0,2 м и 0,5 м противоположно направлению первых трех. $P_1 = 2$ Н, $P_2 = 5$ Н, $P_3 = 15$ Н, $P_4 = 35$ Н и $P_5 = 12$ Н. Найти момент результирующей пары, а также модули ее сил, если плечо сделать равным 0,5 м.

Решение. Момент результирующей пары равен алгебраической сумме моментов составляющих пар [формула (22)]:

$$m(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \sum m(\mathbf{P}_k, \mathbf{P}'_k) = \\ = -2 \cdot 0,75 - 5 \cdot 0,4 - 15 \cdot 0,2 + 35 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0,5 = 6,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Знаки моментов берем согласно установленному выше правилу. Так как результирующая пара имеет положительный момент, то ее вращение направлено против часовой стрелки. Приводя результирующую пару к плечу $d = 0,5$ м, получим модуль ее сил

$$R = R' = \frac{m(\mathbf{R}, \mathbf{R}')}{d} = \frac{6,5}{0,5} = 13 \text{ Н.}$$

Задача 19. На концы консолей¹⁾ балки (рис. 58) действуют две равные параллельные силы $P = P' = 30$ кН; причем сила P направлена вверх, а сила P' — вниз.

Определить реакции опор балки, пренебрегая ее весом, если пролет балки $l = 6$ м и длина каждой консоли $a = 2$ м.

Решение. На данную консольную балку действует пара сил (P, P') , стремящаяся повернуть балку по часовой стрелке. Момент этой пары $m(P, P') = P(l + 2a)$. Так как балка находится в равновесии, а пара может быть уравновешена только парой, то реакции опор R_a и R_b должны также составлять пару (R_a, R_b) , стремящуюся повернуть балку в противоположную сторону, т. е. против часовой стрелки. Момент этой пары сил реакций $m(R_a, R_b) = R_a l$. Согласно условию равновесия пар (23)

$$m(P, P') + m(R_a, R_b) = -P(l + 2a) + R_a l = 0,$$

откуда

$$R_b = R_a = \frac{P(l + 2a)}{l} = \frac{30(6 + 2 \cdot 2)}{6} = 50 \text{ кН}.$$

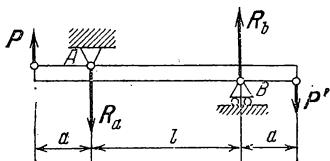


Рис. 58.

¹⁾ Консолью называется часть балки, выступающая за опору.

ГЛАВА V

СИЛЫ, РАСПОЛОЖЕННЫЕ ПРОИЗВОЛЬНО НА ПЛОСКОСТИ

§ 25. Теорема Пуансо¹⁾ о параллельном переносе силы

Не изменяя действия силы на тело, ее можно переносить параллельно своему начальному направлению в любую точку тела, присоединяя при этом некоторую пару.

Доказательство. Пусть мы имеем силу P , приложенную к телу в точке A (рис. 59). Возьмем какую-либо произвольную точку O того же тела и приложим к ней две противоположно направленные силы P' и P'' , параллельные данной силе P и равные ей по модулю. Силы P' и P'' взаимно уравновешиваются, и потому действие на тело одной данной силы P эквивалентно действию на него системы трех сил P' , P'' и P . Сила P' может рассматриваться при этом как сила P , перенесенная параллельно своему начальному направлению в точку O , а силы P'' и P образуют пару, которую мы должны присоединить при параллельном переносе силы из точки A в точку O (для того чтобы не изменилось действие силы на тело при этом ее переносе). Теорема доказана.

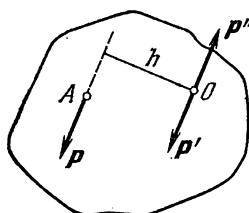


Рис. 59.

Вполне возможно и обратное действие: силу и пару, лежащие в одной плоскости, всегда можно заменить одной силой, равной данной силе, перенесенной параллельно своему начальному направлению в некоторую другую точку.

¹⁾ Л. Пуансо (1777—1859) — французский ученый.

В самом деле, данную силу всегда можно перенести параллельно своему начальному направлению в такую точку, чтобы добавляемая при этом пара имела момент, равный по абсолютному значению, но противоположный по знаку моменту данной пары. Тогда эти две пары взаимно уравновесятся и у нас останется только одна сила, равная по модулю данной, одинаково с ней направленная, но имеющая другую линию действия.

Параллельный перенос силы является не только весьма плодотворным формальным приемом, но в ряде случаев соответствует и физической сущности явлений.

В качестве примера рассмотрим брус, на который действует сила P , приложенная перпендикулярно к поперечному сечению бруса на расстоянии e от центра O тяжести этого сечения (рис. 60).

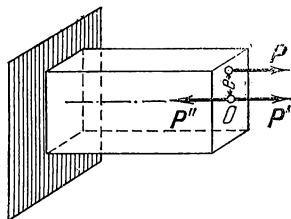


Рис. 60.

Приложим в точке O уравновешенную систему сил (P' , P'') таких, что $P' = P'' = P$. Тогда действие на брус данной (внецентренной) силы P эквивалентно действию на него силы P' , проходящей через центр O и растягивающей брус, и пары (P , P'') с моментом $m(P, P'') = m_O(P) = -P \cdot e$, изгибающей брус.

§ 26. Приведение плоской системы сил к одному центру. Главный вектор и главный момент

Пусть мы имеем систему нескольких¹⁾, например четырех, сил P_1 , P_2 , P_3 и P_4 , расположенных как угодно на плоскости (рис. 61). Возьмем в плоскости действия сил произвольную точку O . Назовем эту точку центром приведения и поочередно приведем к ней, пользуясь теоремой Пуансо, все данные силы. В результате приведения мы получим систему сил P'_1 , P'_2 , P'_3 и P'_4 , приложенных в этой точке, и систему пар

$$(P_1, P''_1), (P_2, P''_2), (P_3, P''_3) \text{ и } (P_4, P''_4).$$

Приложенные в одной точке O силы P'_1 , P'_2 , P'_3 и P'_4 мы можем сложить по правилу силового многоугольника

¹⁾ Число сил, входящих в систему, может быть любым. Дальнейшие рассуждения и вывод от их числа не зависят.

и, следовательно, заменить одной эквивалентной им силой $R_{\text{гл}}$, равной их геометрической сумме. Так как

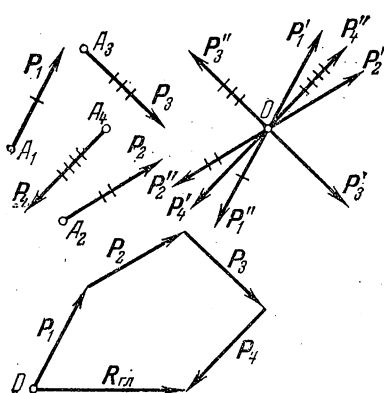


Рис. 61.

силы P'_1 , P'_2 , P'_3 и P'_4 геометрически равны данным силам P_1 , P_2 , P_3 и P_4 , то $R_{\text{гл}} = P'_1 + P'_2 + P'_3 + P'_4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \sum P_k$.

Вектор $R_{\text{гл}}$, равный геометрической сумме всех сил данной системы, является главным вектором этой системы:

$$R_{\text{гл}} = \sum P_k. \quad (24)$$

Модуль и направление главного вектора можно найти по формулам (11)

и (12) равнодействующей системы сходящихся сил:

$$R_{\text{гл}} = \sqrt{R_{\text{гл}x}^2 + R_{\text{гл}y}^2} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2},$$

$$\cos(\widehat{R_{\text{гл}}, x}) = \frac{R_{\text{гл}x}}{R_{\text{гл}}}, \quad \cos(\widehat{R_{\text{гл}}, y}) = \frac{R_{\text{гл}y}}{R_{\text{гл}}}.$$

Все присоединенные пары: (P_1, P'_1) , (P_2, P'_2) , (P_3, P'_3) и (P_4, P'_4) можно сложить по правилу сложения пар, лежащих в одной плоскости, и, следовательно, заменить их одной, результирующей парой. Моменты этих пар равны, согласно сказанному в § 22, моментам данных сил P_1 , P_2 , P_3 и P_4 относительно центра приведения O , т. е.

$$m(P_1, P'_1) = m_O(P_1),$$

$$m(P_2, P'_2) = m_O(P_2),$$

$$m(P_3, P'_3) = m_O(P_3),$$

$$m(P_4, P'_4) = m_O(P_4).$$

Отсюда, обозначая момент результирующей пары через M_O , найдем

$$\begin{aligned} M_O &= m(P_1, P'_1) + m(P_2, P'_2) + m(P_3, P'_3) + m(P_4, P'_4) = \\ &= m_O(P_1) + m_O(P_2) + m_O(P_3) + m_O(P_4) = \sum m_O(P_k). \end{aligned}$$

Алгебраическая сумма моментов всех данных сил, расположенных произвольно на плоскости, относительно какой-либо точки O называется главным моментом данной плоской системы сил относительно этой точки:

$$M_O = \sum m_O(\mathbf{P}_k). \quad (25)$$

Результат, полученный от приведения к одной точке системы сил, произвольно расположенных в плоскости, можно сформулировать теперь следующим образом:

Всякую плоскую систему сил всегда можно заменить одной силой, равной главному вектору системы и приложенной в произвольной точке O , и парой, момент которой равен главному моменту данной системы сил относительно этой точки O .

Модуль и направление главного вектора не зависят от выбора центра O приведения, так как все силы переносятся в точку O параллельно их начальным направлениям, и силовой многоугольник, следовательно, будет во всех случаях одним и тем же. Наоборот, численное значение и знак главного момента зависят, вообще говоря, от выбора центра приведения, так как с изменением центра приведения изменяются моменты данных сил относительно этого центра, а следовательно, и их алгебраическая сумма. Поэтому, когда говорят о главном моменте данной системы сил, то всегда указывают, к какой точке относится этот момент.

§ 27. Случай, когда плоская система сил приводится к одной паре

Главный вектор $\mathbf{R}_{\text{гл}}$ данной плоской системы сил будет равен нулю, если построенный для нее силовой многоугольник окажется замкнутым. Этого условия было бы вполне достаточно для равновесия сходящихся сил. Но в случае произвольного расположения сил на плоскости система эквивалентна не одной силе, равной геометрической сумме сил, а совокупности этой силы, приложенной в произвольном центре O приведения, и пары, момент которой равен главному моменту M_O относительно выбранного центра O приведения. Поэтому если главный вектор данной системы $\mathbf{R}_{\text{гл}}$ равен нулю, а ее главный момент M_O отличен от нуля, то система, очевидно, приводится к паре. Момент этой пары равен

главному моменту данных сил относительно центра приведения.

Так как момент пары равен, как было указано ранее (стр. 87), алгебраической сумме моментов составляющих ее сил относительно любой точки, лежащей в плоскости действия пары, то значение главного момента M_0 в данном случае не может зависеть от выбора центра приведения. Иначе получилось бы, что одна и та же система сил заменяется парами с разными моментами, что невозможно.

Следовательно, если главный вектор данной плоской системы сил равен нулю, а ее главный момент не равен нулю, то эта система эквивалентна паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов всех данных сил относительно любой точки плоскости.

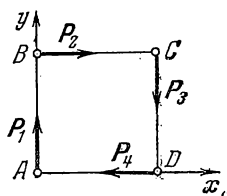


Рис. 62.

Задача 20. Вдоль сторон квадрата $ABCD$ действуют равные по модулю силы $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 100$ Н в направлениях, указанных на рис. 62. Сторона квадрата $a = 0,2$ м. Привести эту систему к точке A .

Решение. Проводим координатные оси так, как показано на рис. 62. Проектируем на эти оси данные силы и определяем их моменты относительно центра приведения A . Найденные значения занесены в таблицу.

Сила	Проекция силы на оси		Момент силы относительно точки A
	x	y	
P_1	0	$P_1 = 100$ Н	$P_1 \cdot 0 = 0$
P_2	$P_2 = 100$ Н	0	$-P_2 \cdot a = -20$ Н·м
P_3	0	$-P_3 = -100$ Н	$-P_3 \cdot a = -20$ Н·м
P_4	$-P_4 = -100$ Н	0	$P_4 \cdot 0 = 0$

Проекции главного вектора

$$R_{\text{гл } x} = \sum X_k = 0, \quad R_{\text{гл } y} = \sum Y_k = 0,$$

откуда модуль главного вектора данной системы сил

$$R_{\text{гл}} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2} = 0.$$

Главный момент данной системы сил относительно центра приведения A

$$M_A = \sum m_A(P_k) = -40 \text{ Н·м.}$$

Так как $R_{\text{гл}} = 0$, то данная система сил приводится к паре с моментом $M_A = -40 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

К тому же результату в данном случае можно было бы прийти и другим, более простым путем. Из рис. 62 видно, что данная система сил состоит из двух пар (P_1, P_3) и (P_2, P_4) , стремящихся повернуть квадрат по часовой стрелке. Но эти две пары, лежащие в одной плоскости, можно заменить одной результирующей парой (P, P') , момент которой равен алгебраической сумме моментов составляющих пар:

$$\begin{aligned} m(P, P') &= m(P_1, P_3) + m(P_2, P_4) = \\ &= -P_1 \cdot a - P_2 \cdot a = -100 \cdot 0,2 - 100 \cdot 0,2 = -40 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

§ 28. Случай, когда плоская система сил приводится к равнодействующей

Пусть данная система сил приводится к какому-то главному вектору $R_{\text{гл}}$, приложенному в произвольном центре O приведения, и к какой-то паре с положительным моментом M_O (рис. 63, а).

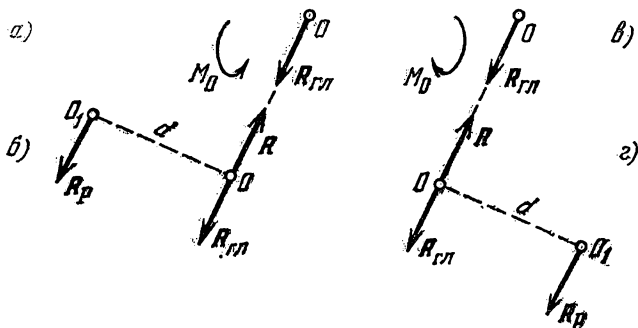


Рис. 63.

Преобразуем пару с данным моментом M_O так, чтобы силы, составляющие эту пару (обозначим их через R_P и R), оказались равными по модулю силе $R_{\text{гл}}$; при этом нужно взять плечо d этой пары таким, чтобы ее момент оставался равным M_O . Таким образом, получим пару (R_P, R) , причем $R_P = R = R_{\text{гл}}$, а плечо пары $d = M_O / R_{\text{гл}}$.

По теореме 2 § 23 пару всегда можно переносить в ее плоскости как угодно; перенесем пару (R_P, R) так, чтобы сила R оказалась приложенной в центре O приведения и направленной противоположно главному вектору $R_{\text{гл}}$

(рис. 63, б). При этом направление вращения пары должно остаться неизменным (для $M_O > 0$ оно должно быть противоположно направлению вращения часовой стрелки). Данная плоская система сил эквивалентна силе $R_{гд}$ и паре (R_P, R) , но силы $R_{гд}$ и R взаимно уравновешиваются, а потому остается одна сила R_P , являющаяся, следовательно, равнодействующей данной системы сил.

Если бы данная система сил при приведении к некоторому центру O приводилась бы к главному вектору $R_{гд}$ и к паре с отрицательным моментом M_O , то, повторяя аналогичные рассуждения, мы также пришли бы к равнодействующей (рис. 63, в и г). Благодаря тому, что пара (R_P, R) имеет в этом случае противоположное направление вращения (по часовой стрелке), равнодействующая R_P окажется проходящей по другую сторону от центра O приведения.

Нетрудно видеть, что в обоих случаях линия действия равнодействующей отстоит от центра O приведения на расстоянии $d = |M_O|/R_{гд}$, отложенном в такую сторону, чтобы знак момента равнодействующей относительно центра O приведения совпадал со знаком главного момента M_O (рис. 63, б и г).

Если при приведении к какому-либо центру главный момент M_O данной системы сил относительно этого центра будет равен нулю, но главный вектор системы $R_{гд}$ не равен нулю, то линия действия равнодействующей этой системы будет проходить через центр приведения.

Итак, если главный вектор данной плоской системы сил не равен нулю, то эта система приводится к равнодействующей, равной по модулю и направлению главному вектору $R_{гд}$.

Сила $R_{гд}$, равная главному вектору системы и приложенная в центре O приведения, не является в общем случае произвольного расположения сил на плоскости их равнодействующей; такая система эквивалентна, вообще говоря, совокупности силы $R_{гд}$ и некоторой пары. При произвольном расположении сил на плоскости система может и не иметь равнодействующей, а приводиться к паре. Но если только плоская система сил имеет равнодействующую, то эта равнодействующая во всех случаях равна по модулю и по направлению главному вектору $R_{гд}$. При этом для сходящихся сил линия

действия равнодействующей проходит через общую точку пересечения сил; для сил же, расположенных как угодно на плоскости, положение линии действия равнодействующей определяется величиной и знаком главного момента.

Задача 21. Вдоль сторон квадрата $ABCD$ (рис. 64) действуют равные по модулю силы $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 100$ Н. Сторона квадрата $a = 0,2$ м. Привести эту систему к точке A .

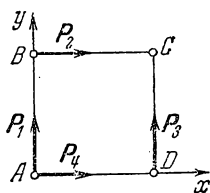


Рис. 64.

Решение. Проведем координатные оси так, как показано на рис. 64. Проектируем на эти оси данные силы и определяем их моменты относительно центра A приведения. Найденные значения занесены в таблицу.

Сила	Проекции силы на оси		Момент силы относительно точки A
	x	y	
P_1	0	$P_1 = 100$ Н	0
P_2	$P_2 = 100$ Н	0	$-P_2 a = -20$ Н·м
P_3	0	$P_3 = 100$ Н	$P_3 a = 20$ Н·м
P_4	$P_4 = 100$ Н	0	0

Проекции главного вектора

$$R_{\text{гл } x} = \sum X_k = 200 \text{ Н}, \quad R_{\text{гл } y} = \sum Y_k = 200 \text{ Н}.$$

Модуль главного вектора

$$R_{\text{гл}} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2} = \sqrt{200^2 + 200^2} \approx 283 \text{ Н}.$$

Направление главного вектора определится из формулы

$$\cos(\widehat{R_{\text{гл}}, x}) = \frac{\sum X_k}{R_{\text{гл}}} = \frac{200}{200\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда $(\widehat{R_{\text{гл}}, x}) = 45^\circ$.

Главный момент относительно центра A приведения

$$M_A = \sum m_A(P_k) = -20 + 20 = 0.$$

Так как $R_{\text{гл}} \neq 0$, а $M_A = 0$, то данная система приводится к равнодействующей $R_P = R_{\text{гл}}$, направленной по диагонали квадрата AC и равной по модулю 283 Н.

Тот же результат мы получили бы, если бы перенесли силы P_2 и P_3 в точку C пересечения их линий действия, а затем сложили бы по правилу параллелограмма эти силы и силы P_1 и P_4 , приложенные

в точке A . Таким образом, мы получили бы две силы, направленные по одной прямой (диагонали квадрата AC) в одну сторону, которые можно заменить одной равнодействующей, равной по модулю

$$R_p = 2 \sqrt{100^2 + 100^2} \approx 283 \text{ Н.}$$

Задача 22. На мостовую ферму (рис. 65) действуют вертикальные силы $P_1 = 20 \text{ кН}$ и $P_2 = 40 \text{ кН}$ соответственно на расстоянии 10 м и 40 м от левого конца фермы и горизонтальная сила $P_3 = 30 \text{ кН}$ на уровне верхнего пояса фермы CD . Высота фермы 6 м . Определить равнодействующую сил P_1 , P_2 и P_3 .

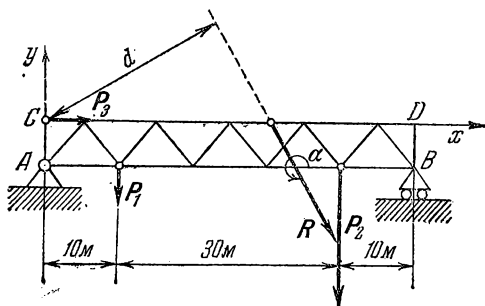


Рис. 65.

Решение. Приняв точку C за центр приведения, приведем к ней данную систему сил. Для вычисления главного вектора и главного момента проведем координатные оси x и y (так, как показано на рис. 65), спроектируем все силы на эти оси и возьмем их моменты относительно принятого центра C приведения.

Сила	Проекции силы на оси		Момент силы относительно точки C
	x	y	
P_1	0	$-P_1 = -20 \text{ кН}$	$-P_1 \cdot 10 = -200 \text{ кН} \cdot \text{м}$
P_2	0	$-P_2 = -40 \text{ кН}$	$-P_2 \cdot 40 = -1600 \text{ кН} \cdot \text{м}$
P_3	$P_3 = 30 \text{ кН}$	0	$P_3 \cdot 0 = 0$

Проекции главного вектора $R_{г\text{л}}$ на данные координатные оси

$$R_{г\text{л}x} = \sum X_k = 30 \text{ кН}, \quad R_{г\text{л}y} = \sum Y_k = -20 - 40 = -60 \text{ кН.}$$

Отсюда находим модуль главного вектора:

$$R_{г\text{л}} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2} = \sqrt{30^2 + (-60)^2} = 30\sqrt{5} \approx 67,1 \text{ кН.}$$

Так как главный вектор $R_{г.л.}$ не равен нулю, то данная система сил приводится к равнодействующей, равной по модулю и направлению главному вектору.

Направление равнодействующей определится из формул

$$\cos \alpha = \cos (\widehat{R_P, x}) = \frac{R_P x}{R_P} = \frac{30}{30 \sqrt{5}} = 0,447,$$

$$\sin \alpha = \cos (\widehat{R_P, y}) = \frac{R_P y}{R_P} = -\frac{60}{30 \sqrt{5}} = -0,894.$$

Так как $\cos \alpha$ положителен, а $\sin \alpha$ отрицателен, то угол $\alpha = (\widehat{R_P, x})$ принадлежит четвертой четверти и равен $296^\circ 40'$.

Линия действия равнодействующей проходит от центра приведения на расстоянии $d = |M_C|/R_{г.л.}$, где M_C — главный момент данной системы сил относительно принятого центра C приведения, равный $\sum m_C(P_k) = -200 - 1600 = -1800 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Знак момента показывает, что это расстояние d (длина перпендикуляра, опущенного из центра приведения на линию действия равнодействующей) должно быть отложено вправо от центра приведения (как показано на рис. 65).

В нашем случае расстояние

$$d = \frac{|M_C|}{R_P} = \frac{1800}{67} = 26,9 \text{ м.}$$

Зная расстояние d и угол $(\widehat{R_P, x})$, нетрудно при желании найти и точки пересечения линии действия равнодействующей с верхним и нижним поясами фермы.

§ 29. Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Условие равновесия рычага

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы и главный вектор, и главный момент этой системы относительно любой точки плоскости действия сил равнялись нулю:

$$R_{г.л.} = 0 \quad \text{и} \quad M_O = \sum m_O(P_k) = 0. \quad (26)$$

Из равенства $R_{г.л.} = 0$ следует, что геометрическая сумма всех сил, приложенных в центре приведения, равна нулю; поэтому согласно условию равновесия сходящихся сил (стр. 61) силы эти взаимно уравновешиваются. Из равенства $M_O = 0$ следует, что алгебраическая сумма моментов всех пар, получающихся при приведении

данной системы сил к центру O , равна нулю, а потому согласно условию равновесия пар (стр. 92) пары эти также взаимно уравниваются. Отсюда ясно, что для равновесия плоской системы сил достаточно соблюдения двух условий:

$$R_{\text{гл}} = \sum P_k = 0 \quad \text{и} \quad M_O = \sum m_O(P_k) = 0.$$

Соблюдение обоих этих условий не только достаточно для равновесия, но и необходимо. В самом деле, как мы видели выше, если главный вектор данной системы сил не равен нулю, то система приводится к равнодействующей; если главный вектор равен нулю, а главный момент данной системы отличен от нуля, то система приводится к паре сил. Ясно, что в обоих этих случаях тело не будет находиться в равновесии.

Пользуясь установленными выше условиями равновесия, нетрудно доказать теорему, носящую имя французского ученого Вариньона (1654—1722):

Если плоская система сил имеет равнодействующую, то алгебраическая величина момента равнодействующей относительно любой точки плоскости действия сил равна сумме алгебраических величин моментов составляющих сил относительно той же точки.

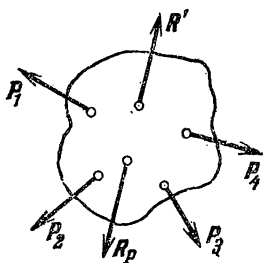


Рис. 66.

Доказательство. Предположим, что какая-либо произвольная плоская система сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ (рис. 66) имеет равнодействующую R . Приведем эту систему к равновесию, добавив к ней уравнивающую силу R' , которая согласно

следствию 2 из аксиом статики должна быть равна по модулю с равнодействующей R и направлена с ней по одной прямой в противоположную сторону. Так как система сил $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$ находится в равновесии, то она должна удовлетворять установленным выше условиям равновесия, одним из которых для данной системы сил является равенство нулю алгебраической суммы моментов всех сил относительно любой точки O плоскости действия этих сил. Следовательно,

$$\sum m_O(P_k) + m_O(R') = 0.$$

Но так как силы R' и R_P равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны, то и алгебраические величины их моментов относительно любой точки будут также равны по модулю и противоположны по знаку, т. е. $m_O(R') = -m_O(R_P)$. Подставляя это значение в предыдущее равенство, будем иметь

$$\sum m_O(P_k) - m_O(R_P) = 0,$$

откуда

$$m_O(R_P) = \sum m_O(P_k). \quad (27)$$

Теорема доказана.

Из теоремы Вариньона как следствие вытекает условие равновесия рычага:

Рычагом в широком смысле называется твердое тело, вращающееся около неподвижной оси и находящееся под действием сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

Точка пересечения оси рычага с плоскостью действия сил называется точкой опоры.

Пусть на рычаг (рис. 67) действует система сил P_1, P_2, P_3, P_4 , лежащих в плоскости чертежа, и пусть O — точка опоры.

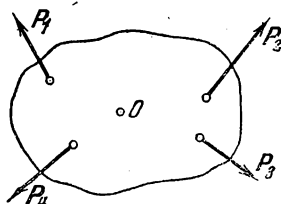


Рис. 67.

Для равновесия рычага достаточно, чтобы равнодействующая всех приложенных к нему сил, если она существует, проходила через точку опоры; в этом случае она уравнивается сопротивлением опоры. Это условие является в то же время и необходимым условием равновесия рычага, так как если равнодействующая не пройдет через точку опоры O , то она сообщит рычагу вращение около этой точки. Но если равнодействующая проходит через точку опоры, то ее момент относительно этой точки $m_O(R_P) = \sum m_O(P_k) = 0$.

Если же главный вектор системы равен нулю и система, следовательно, приводится к паре сил, то для предотвращения вращения момент равнодействующей пары, равный сумме моментов данных сил относительно любой точки, также должен равняться нулю. Отсюда ясно, что для равновесия рычага необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю алгебраическая сумма моментов всех приложенных к рычагу сил относительно точки его опоры,

Задача 23. Рычаг AB , могущий вращаться около неподвижной оси, проходящей через точку C , находится в равновесии под действием системы сил P_1, P_2, P_3, P_4 , приложенных так, как показано на рис. 68. Определить модуль силы P_4 , если $P_1 = 50$ Н, $P_2 = 20$ Н, $P_3 = 30$ Н.

Решение. Модуль силы P_4 определится из условия равновесия рычага $\sum m_C(P_k) = P_1 d_1 - P_2 d_2 - P_3 d_3 - P_4 d_4 = 0$. За центр моментов берется точка опоры C .

Из рис. 68 видно, что $d_1 = AC = 5$ м, $d_2 = DC \cdot \sin 45^\circ = 3 \cdot 0,707 = 2,12$ м, $d_3 = CE \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1$ м, $d_4 = CB \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot 0,866 = 3,46$ м. Подставляя эти значения, так же как и значения известных сил, в написанное выше условие равновесия рычага и решая полученное уравнение, найдем $P_4 = 51,3$ Н.

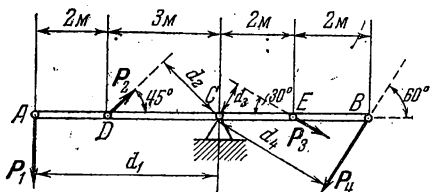


Рис. 68.

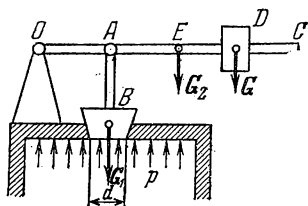


Рис. 69.

Задача 24. Предохранительный клапан парового котла (рис. 69) диаметром $d = 65$ мм и весом $G_1 = 80$ Н соединен стержнем AB с рычагом OC длиной 60 см и весом $G_2 = 24$ Н, вращающимся на шарнире O , причем $OA = 8$ см. В какой точке D рычага OC должен быть подвешен груз весом $G = 250$ Н для того, чтобы клапан открывался при давлении в котле $p = 500$ кПа?

Решение. К рычагу OC приложены параллельные силы: в точке A сила P давления пара и сила G_1 тяжести клапана (направленные по одной прямой в противоположные стороны), в точке E (в середине рычага) сила G_2 тяжести рычага и в некоторой точке D сила G тяжести груза.

Условие равновесия рычага:

$$\sum m_O(P_k) = P \cdot OA - G_1 \cdot OA - G_2 \cdot OE - G \cdot OD = 0.$$

Сила давления пара на клапан

$$P = \frac{\pi d^2}{4} p = \frac{3,14 \cdot 0,065^2}{4} \cdot 500 = 1,66 \text{ кН} = 1660 \text{ Н}.$$

Подставляя найденное значение силы P и известные значения плеч в предыдущее равенство, получим $OD = 45,8$ см. /

§ 30. Различные формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил

Как было доказано (§ 29), для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю ее главный вектор $R_{гл} = \sum P_k$

и алгебраическая величина главного момента M_O , относительно любой точки O , лежащей в плоскости действия сил. Исходя из этого, можно установить для произвольной плоской системы сил уравнения равновесия в трех различных формах.

Первая (основная) форма уравнений. Из формул для модуля главного вектора и главного момента плоской системы сил

$$R_{\text{гл}} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2} \quad \text{и} \quad M_O = \sum m_O(\mathbf{P}_k)$$

непосредственно следует, что $R_{\text{гл}}$ и M_O будут равны нулю в том случае, когда имеют место равенства

$$\sum X_k = 0, \quad \sum Y_k = 0, \quad \sum m_O(\mathbf{P}_k) = 0. \quad (28)$$

Следовательно, для равновесия плоской системы как угодно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей, лежащих в плоскости действия сил и сумма алгебраических величин моментов всех сил, относительно любой точки той же плоскости.

Этой формой уравнений пользуются чаще всего при решении задач о равновесии произвольной плоской системы сил. Но в некоторых случаях оказывается удобнее пользоваться одной из двух других форм уравнений равновесия. Важно заметить, что во всех случаях для произвольной плоской системы сил можно составить только три независимых уравнения равновесия.

Вторая форма уравнений равновесия (теорема о трех моментах). Для равновесия плоской системы как угодно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы алгебраических величин моментов всех сил относительно трех любых, но не лежащих на одной прямой, точек плоскости действия сил:

$$\sum m_A(\mathbf{P}_k) = 0, \quad \sum m_B(\mathbf{P}_k) = 0, \quad \sum m_C(\mathbf{P}_k) = 0, \quad (29)$$

если точки A, B и C не лежат на одной прямой.

Необходимость этих уравнений следует из того, что при равновесии плоской системы сил должна быть равна нулю сумма алгебраических величин моментов всех ее сил относительно любой точки плоскости. Доста-

точность же, этих трех уравнений для утверждения о равновесии плоской системы сил вытекает из следующих соображений.

Система не может приводиться к паре, так как в этом случае главный момент системы относительно любой точки равен моменту пары и не может равняться нулю.

Система не может приводиться и к равнодействующей. По теореме Вариньона момент равнодействующей относительно любой точки равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки. При существовании равнодействующей ее момент относительно какой-либо точки может равняться нулю лишь в том случае, если линия действия равнодействующей проходит эту точку. Но так как три данные точки A , B и C не лежат на одной прямой, то линия действия равнодействующей

не может одновременно проходить через эти три точки.

Третья форма уравнений равновесия. Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы алгебраических величин моментов всех сил относительно двух любых точек плоскости и

сумма проекций всех сил на какую-либо одну ось, лежащую в той же плоскости, но не перпендикулярную к прямой, проходящей через выбранные центры моментов:

$$\sum m_A(\mathbf{P}_k) = 0, \quad \sum m_B(\mathbf{P}_k) = 0, \quad \sum X_k = 0, \quad (30)$$

если ось x не перпендикулярна к прямой AB .

Необходимость этих условий вытекает из того, что при равновесии плоской системы сил равны нулю как сумма проекций всех сил на любую ось, так и сумма моментов всех сил относительно любой точки.

Достаточность же их требует доказательства. Из равенств $\sum m_A(\mathbf{P}_k) = 0$ и $\sum m_B(\mathbf{P}_k) = 0$, согласно теореме Вариньона, следует, что линия действия равнодействующей \mathbf{R}_P (если она существует) должна обязательно проходить через точки A и B . Но в этом случае ее проекция ($R_{Px} = \sum X_k$) на ось x , не перпендикулярную к прямой

AB , не может равняться нулю (рис. 70). Это противоречит условию $\sum X_k = 0$, и потому равнодействующая R_R при данных условиях обязательно должна равняться нулю и система будет находиться в равновесии.

§ 31. Замечания к решению задач о равновесии плоской системы сил

Методика решения задач о равновесии системы сил, расположенных как угодно на плоскости, та же, что и для сходящихся сил. В дополнение к сказанному в § 16 можно лишь рекомендовать за центр моментов выбирать точку, лежащую на линии действия одной из неизвестных сил (еще лучше точку пересечения линий действия двух неизвестных сил, если только положение этой точки легко определяется). Момент силы относительно таким образом выбранного центра будет равен нулю (вследствие равенства нулю ее плеча), и эта неизвестная сила, следовательно, исключается из уравнения моментов.

Все аксиомы и положения статики устанавливаются для так называемых сосредоточенных сил, т. е. для сил, приложенных к тем или иным точкам твердого тела. На практике же часто приходится иметь дело с силами, распределенными вдоль данной поверхности по некоторому закону. При решении задач статики такую систему сил надо заменить ее равнодействующей. Как это делается в простейшем случае плоской системы равномерно распределенных сил, показано в задачах 28 и 30. Если в состав плоской системы сил, действующих на находящееся в равновесии тело, входит пара сил (как, например, в задачах 28 и 30), то, составляя уравнения равновесия, надо иметь в виду, что алгебраическая сумма проекций сил любой пары (представляющей собой всегда систему двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил) на любую ось равна нулю. Алгебраическая же сумма моментов сил пары относительно любой точки плоскости, согласно доказанной выше теореме (стр. 87), равна алгебраической величине момента пары.

Многие задачи статики, как мы уже знаем, заключаются в определении реакций связей, в частности в определении реакций опор различного рода балочных систем, ферм и т. п.

Помимо шарнирных опор, подвижных и неподвижных, о которых говорилось ранее (§ 7), в практике встречается еще и опора, осуществляемая жесткой заделкой (неподвижным защемлением) конца балки (рис. 71, а). Такая опора не допускает не только линейных перемещений балки (как и шарнирно-неподвижная опора), но и ее поворота.

На заделанную ось балки AC действуют со стороны поверхностей, на которые она опирается, неравномерно распределенные реакции этих поверхностей. Пользуясь

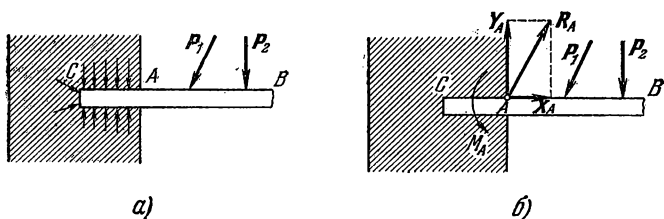


Рис. 71.

теоремой Пуансо, их можно привести к одной точке (рис. 71, б) и заменить одной силой — реакцией R_A , приложенной в точке A и равной главному вектору распределенных реакций, и одной парой с моментом M_A , равным главному моменту этих сил относительно точки A и называемым *моментом реакции заделки*. Нахождение неизвестной по модулю и по направлению реакции R_A в свою очередь можно заменить нахождением алгебраических значений X_A и Y_A двух составляющих этой силы.

Следовательно, нахождение реакции жесткой заделки сводится (см. задачу 28) в общем случае сил, расположенных как угодно на плоскости, к определению трех неизвестных величин: алгебраических величин составляющих X_A и Y_A реакции R_A , препятствующих любому линейному перемещению балки в плоскости действия сил, и алгебраической величины момента реакции заделки M_A , препятствующего вращению балки под действием приложенных к ней активных сил.

Задача 25. Однородный стержень AB длиной 3 м и весом $G = 300$ Н опирается концом A на гладкий горизонтальный пол под углом $\alpha = 60^\circ$ и в точках C и D — на два ролика (рис. 72). Опре-

делить силы давления стержня на пол и ролики, если расстояние $AC = CD = DB = 1$ м.

Решение. Силы давления стержня на пол и ролики равны по модулю соответствующим реакциям пола и роликов. Реакция гладкого пола R_A перпендикулярна к полу. Реакции роликов R_C и R_D , если пренебречь малым в них трением, перпендикулярны к поверхности стержня. Отбрасывая связи (опоры A , C и D) и заменяя их соответствующими реакциями, можно рассматривать стержень как свободный, находящийся в равновесии под действием сил R_A , R_C , R_D и G (силы тяжести однородного стержня, приложенной в его середине — точке E), расположенных в одной плоскости. Проведя координатные оси x и y так, как показано на чертеже, и приняв за центр моментов точку A , составляем таблицу проекций всех сил на выбранные координатные оси и их моментов относительно точки A .

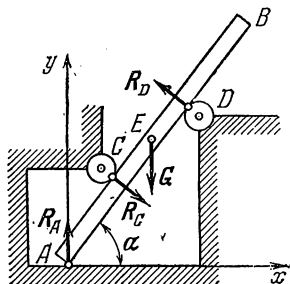


Рис. 72.

Сила	Проекции силы на оси		Момент силы относительно точки A
	x	y	
G	0	$-G$	$-G \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos \alpha$
R_A	0	R_A	0
R_C	$R_C \sin \alpha$	$-R_C \cos \alpha$	$-R_C \cdot AC$
R_D	$-R_D \sin \alpha$	$R_D \cos \alpha$	$R_D \cdot AD$

Уравнения равновесия (28) принимают вид

$$\sum X_k = R_C \sin \alpha - R_D \sin \alpha = 0,$$

откуда $R_C = R_D$,

$$\sum Y_k = -G + R_A - R_C \cos \alpha + R_D \cos \alpha,$$

откуда $R_A = G = 300$ Н,

$$\sum m_A(P_k) = -G \frac{AB}{2} \cos \alpha - R_C \cdot AC + R_D \cdot AD = 0.$$

Подставляя значения G , AB , AC , AD и α и решая последнее уравнение, находим $R_C = R_D = 225$ Н.

Задача 26. Вагонетка (рис. 73) весом $G = 10$ кН удерживается на наклонной плоскости канатом, перекинутым через блок и параллельным этой плоскости. Угол α равен 30° . Определить силы давления колес вагонетки на плоскость в точках A и B и натяжение каната, если центр тяжести вагонетки находится в точке C , $AD = DB = a = 0,75$ м, $CE = b = 0,3$ м.

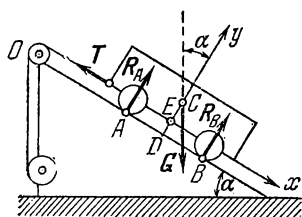


Рис. 73.

Решение. Рассматриваем вагонетку как свободную, находящуюся в равновесии под действием следующих сил: силы G тяжести вагонетки, приложенной в ее центре тяжести C , реакции каната T и реакций плоскости R_A и R_B , перпендикулярных к наклонной плоскости. Располагаем оси координат так, как показано на рис. 73. За центр моментов берем

точку E . Значения проекций всех сил на выбранные координатные оси и моментов этих сил относительно точки E приведены в ниже-следующей таблице.

P_k	X_k	Y_k	$m_E(P_k)$
T	$-T$	0	0
R_A	0	R_A	$-R_A a$
R_B	0	R_B	$R_B a$
G	$G \cos(90^\circ - \alpha) = G \sin \alpha$	$-G \cos \alpha$	$-Gb \sin \alpha$

Уравнения равновесия:

$$\sum X_k = -T + G \sin \alpha = 0,$$

$$\sum Y_k = R_A + R_B - G \cos \alpha = 0,$$

$$\sum m_E(P_k) = -R_A a + R_B a - Gb \sin \alpha = 0.$$

Подставляя данные и решая систему уравнений, найдем

$$T = 5 \text{ кН}, \quad R_A = 5,33 \text{ кН}, \quad R_B = 3,33 \text{ кН}.$$

Задача 27. Ось AB подъемного крана, вес которого равен $G = 15$ кН, вращается в подшипнике B и в подшипнике A (рис. 74). К крану в точке C подвешен груз $Q = 8$ кН. Определить реакции подшипника и подшипника, если расстояние $AB = 4$ м, расстояние центра тяжести крана D от оси его вращения $KD = 1$ м и расстояние точки C от той же оси $EC = 2$ м.

Решение. Так как подшипник B препятствует всякому поступательному перемещению крана, то его реакцию разложим на горизонтальную X_B и вертикальную Y_B составляющие. Подшипник A , не препятствующий перемещению крана вдоль его оси, дает только одну горизонтальную реакцию X_A , перпендикулярную к оси вращения крана. Освобождаемся от связей и рассматриваем равновесие крана

под действием всех приложенных к нему сил (активных сил и реакций связей). Располагаем координатные оси так, как показано на чертеже. За центр моментов удобно взять точку B , так как через нее проходят линии действия неизвестных сил X_B и Y_B , и, следовательно, их моменты относительно этой точки будут равны нулю.

Составляем уравнения равновесия крана:

$$\begin{aligned}\sum X_k &= -X_A + X_B = 0, & \sum Y_k &= -G - Q + Y_B = 0, \\ \sum m_B(P_k) &= -G \cdot KD - Q \cdot EC + X_A \cdot AB = 0.\end{aligned}$$

Подставляя данные и решая систему уравнений, находим

$$Y_B = G + Q = 23 \text{ кН}, \quad X_A = 7,75 \text{ кН}, \quad X_B = X_A = 7,75 \text{ кН}.$$

Задача 28. Консольная балка AB нагружена так, как показано на рис. 75. Интенсивность ¹⁾ равномерно распределенной по всей длине балки нагрузки $q = 20 \text{ кН/м}$. Длина балки $l = 2 \text{ м}$.

В точке B балки приложена сосредоточенная нагрузка $P = 40 \text{ кН}$, направленная вниз под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали. Определить реакции жесткой заделки, пренебрегая собственным весом балки.

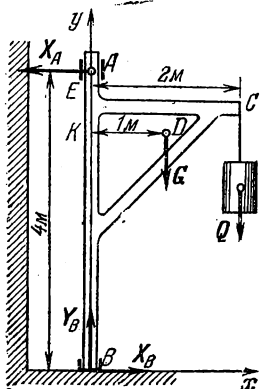


Рис. 74.

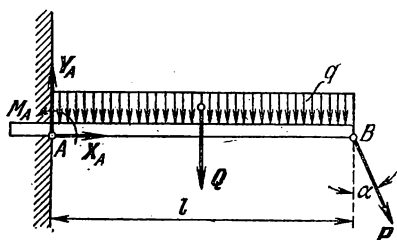


Рис. 75.

Решение. Рассматриваем равновесие балки. Активными силами, приложенными к балке, будут равномерно распределенная нагрузка, равнодействующая которой $Q = ql = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кН}$ приложена в середине балки, и сосредоточенная сила P . В точке A на балку наложена жесткая связь (заделка в стену), препятствующая линейным перемещениям балки и лишаящая ее возможности поворачиваться вокруг точки A . Действие такой связи, как говорилось выше (стр. 110), эквивалентно действию одной реакции R_A и некоторой пары.

Направление вращения этой пары нам, вообще говоря, пока неизвестно. Примем момент M_A этой пары за положительный, т. е. будем считать, что эта пара стремится повернуть балку против хода

¹⁾ Интенсивностью q нагрузки называется численная величина нагрузки, приходящаяся на единицу длины нагруженной части балки.

стрелки часов. Если при решении задачи значение этого момента окажется отрицательным, то это будет означать, что в действительности направление вращения пары противоположно предположенному.

Так как направление силы R_A реакции нам также, вообще говоря, неизвестно, то разложим ее на составляющие X_A и Y_A , направление которых показано на рисунке.

Таким образом, данная балка находится в равновесии под действием плоской системы сил Q, P, X_A, Y_A и пары с моментом M_A . Составляем уравнения равновесия балки:

$$\sum X_k = X_A + P \sin \alpha = 0, \quad \sum Y_k = Y_A - Q - P \cos \alpha = 0,$$

$$\sum m_A(P_k) = M_A - Q \frac{l}{2} - Pl \cos \alpha = 0.$$

Решая эту систему уравнений и подставляя данные, получим

$$X_A = -P \sin \alpha = -20 \text{ кН}, \quad Y_A = Q + P \cos \alpha = 74,6 \text{ кН},$$

$$M_A = Q \frac{l}{2} + Pl \cos \alpha = 109,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отрицательное значение, полученное для X_A , показывает, что в действительности составляющая X_A реакции направлена в сторону, противоположную предположенной.

§ 32. Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил

Так как параллельное расположение сил на плоскости является частным случаем их произвольного на ней расположения, то к такой системе также могут быть применены установленные в предыдущем параграфе три уравнения равновесия плоской системы сил:

$$\sum X_k = 0, \quad \sum Y_k = 0,$$

$$\sum m_O(P_k) = 0.$$

Пользуясь тем, что оси проекций можно располагать в плоскости действия сил как угодно, проведем ось y параллельно данным силам, а ось x — перпендикулярно к ним (рис. 76).

Проекция каждой из сил на перпендикулярную к ним ось x будет равна нулю, и потому первое из уравнений обращается в тождество $0 = 0$ при любых значениях сил. Следовательно, уравнение $\sum X_k = 0$ выпол-

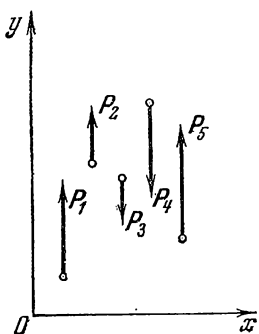


Рис. 76.

няется для системы параллельных сил независимо от того, находится ли эта система в равновесии или нет. При таком выборе осей проекций для параллельных сил равенство $\sum X_k = 0$ перестает быть уравнением равновесия и поэтому отпадает.

Так как все данные силы параллельны оси y , то проекция каждой силы на эту ось равна модулю этой силы, взятому с соответствующим знаком. Следовательно, $\sum Y_k = \sum (\pm P_k)$. Таким образом, уравнения равновесия для плоской системы параллельных сил принимают вид

$$\sum (\pm P_k) = 0, \quad \sum m_O(P_k) = 0. \quad (31)$$

Для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраическая сумма всех сил и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки, лежащей в плоскости действия сил.

Вспоминая сказанное на стр. 108 о третьей возможной форме уравнений равновесия плоской системы сил и принимая за ось проекций ось, перпендикулярную к параллельным силам, уравнениям равновесия параллельных сил можно придать и другую форму, а именно:

$$\sum m_A(P_k) = 0, \quad \sum m_B(P_k) = 0. \quad (32)$$

Для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы моментов всех сил относительно каждой из двух произвольно выбранных, но не лежащих на прямой, параллельной данным силам, точек плоскости.

Задача 29. К горизонтальной консольной балке AB , имеющей неподвижную опору B и подвижную опору C , приложены в точках A и D вертикальные силы $P_1 = 6$ кН и $P_2 = 4$ кН (рис. 77). Найти опорные реакции, если $AC = 1,2$ м, $CD = 0,9$ м и $DB = 2,1$ м.

Решение. Реакция R_C подвижной опоры C направлена перпендикулярно к горизонтальной неподвижной опорной плоскости катков и, следовательно, параллельна приложенным к балке вертикальным активным силам P_1 и P_2 . Направление реакции R_B неподвижной опоры B , вообще говоря, неопределенно. Но балка находится в равновесии под действием приложенных к ней активных сил и реакций связей, а система параллельных сил P_1 , P_2 и R_C может быть уравновешена только параллельной им силой. Таким

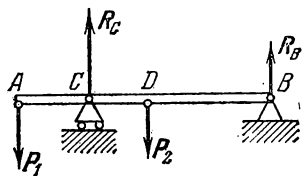


Рис. 77.

образом, в данном случае реакция неподвижной опоры B может быть также только вертикальной и находящиеся в равновесии четыре силы P_1 , P_2 , R_C и R_D должны удовлетворять двум условиям равновесия параллельных сил на плоскости.

Возьмем алгебраическую сумму моментов всех сил относительно какой-либо точки. Наиболее простое решение получается, если за центр моментов взять одну из точек опоры, например C :

$$\sum m_C(P_k) = P_1 \cdot AC + R_C \cdot 0 - P_2 \cdot CD + R_B \cdot CB = 0.$$

Отсюда

$$R_B = \frac{P_2 \cdot CD - P_1 \cdot AC}{CB} = \frac{4 \cdot 0,9 - 6 \cdot 1,2}{3} = -1,2 \text{ кН}.$$

Знак минус показывает, что реакция опоры B будет направлена не вверх, как было предположено при составлении уравнений, а в противоположную сторону — вниз. Реакцию второй опоры можно найти, приравняв нулю или сумму моментов всех сил относительно другой точки (удобней всего, точки B), или алгебраическую сумму всех сил $\sum (\pm P_k) = -P_1 + R_C - P_2 + R_B = 0$, откуда $R_C = P_1 + P_2 - R_B = 6 + 4 - (-1,2) = 11,2 \text{ кН}$.

Задача 30. На двухконсольную горизонтальную балку действует пара сил с моментом $m = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, на правую консоль — равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 75 \text{ кН/м}$, а в точке C левой консоли — вертикальная сосредоточенная нагрузка $P = 30 \text{ кН}$. Размеры балки указаны на чертеже (рис. 78). Определить реакции опор A и B .

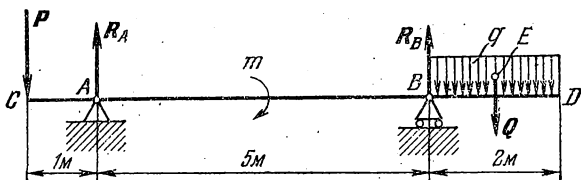


Рис. 78.

Решение. Для определения реакций опор заменим распределенную нагрузку, действующую на участке балки BD длиной $l = 2 \text{ м}$, равнодействующей. Так как нагрузка равномерно распределена по всей длине участка, то ее равнодействующая $Q = ql = 75 \cdot 2 = 15 \text{ кН}$ приложена в точке E , середине участка BD .

Реакция R_B подвижной опоры и приложенные к балке активные силы P и Q вертикальны. Так как пара сил может только вращать тело и не может сообщить балке горизонтального перемещения, то реакция R_A неподвижной опоры A будет направлена также вертикально.

Составляем уравнения (32) равновесия балки. Так как (стр. 87) сумма моментов сил пары относительно любого центра равна моменту пары и данная пара вращает плоскость чертежа по часовой стрелке, то

$$\sum m_A(P_k) = P \cdot AC - m + R_B \cdot AB - Q \cdot AE = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{Q \cdot AE + m - P \cdot AC}{AB} = \frac{15 \cdot 6 + 20 - 30 \cdot 1}{5} = 16 \text{ кН},$$

$$\sum m_B(P_k) = P \cdot BC - R_A \cdot AB - m - Q \cdot BE = 0,$$

откуда

$$R_A = \frac{P \cdot BC - m - Q \cdot BE}{AB} = \frac{30 \cdot 6 - 20 - 15 \cdot 1}{5} = 29 \text{ кН}.$$

Полученный результат можно проверить. Так как балка находится в равновесии, то уравнение $\sum (\pm P_k) = 0$ должно обращаться при подстановке в него значений приложенных к балке сил в тождество. Действительно, $\sum (\pm P_k) = -P + R_A + R_B - Q = -30 + 29 + 16 - 15 = 0$.

Силы пары в это уравнение мы не подставляем, так как алгебраическая сумма их всегда равна нулю.

§ 33. Равновесие системы сочлененных тел

Системой сочлененных твердых тел называется конструкция, состоящая из нескольких твердых тел, свободно опирающихся друг на друга или соединенных между собой какими-либо нежесткими связями (шарнирами, гибкой нитью).

Так как при равновесии системы тел каждое тело системы находится в равновесии, то задачи на равновесие системы сочлененных тел обычно решаются путем рассмотрения равновесия каждого тела в отдельности.

При рассмотрении равновесия какого-либо тела системы мы должны рассматривать другие, сочлененные с ними, тела как связи и заменять их действие на рассматриваемое тело реакциями этих связей. При этом всегда надо иметь в виду, что силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Иногда бывает выгодней рассматривать сначала равновесие всей системы в целом, а затем уже равновесие отдельного тела. Составляя уравнения равновесия всей системы в целом, мы рассматриваем ее в соответствии с принципом отвердевания как абсолютно твердое тело, и потому в эти уравнения не войдут силы, с которыми действуют друг на друга отдельные тела системы. Сумма проекций на любую ось этих, равных по модулю и

противоположных по направлению сил, так же как и сумма их моментов относительно любой точки, равна нулю.

Задача 31. Однородный шар весом $G = 600$ Н радиуса $r = 15$ см опирается на гладкую вертикальную стенку и гладкий стержень AB , шарнирно связанный со стеной в точке A (рис. 79, а). Пренебрегая весом стержня AB , определить вертикальную силу P , которую надо приложить в точке B к стержню для того, чтобы система была в равновесии, реакцию шарнира A и силу давления шара на стену. Расстояние от точки C касания шара со стержнем до точки B приложения силы P равно 1,2 м. Угол BAD равен 60° .

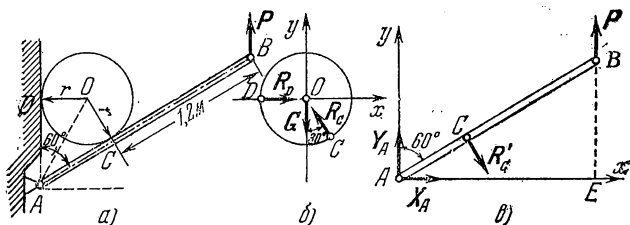


Рис. 79.

Решение. В данной задаче имеем дело с равновесием системы, состоящей из двух тел: шара и стержня.

Рассмотрим сначала равновесие шара, заменяя наложенные на него связи их реакциями. Шар находится в равновесии под действием следующих сил: силы тяжести шара G , приложенной в его геометрическом центре, реакции R_C стержня и реакции R_D стены (рис. 79, б), проходящих соответственно через точки C и D касания шара и нормальных к его поверхности. Таким образом, приложенные к шару силы сходятся в центре шара.

Выбрав направления координатных осей x и y (рис. 79, б), составляем два уравнения равновесия для данной плоской системы сходящихся сил.

Реакция R_D гладкой вертикальной стены перпендикулярна к ней, т. е. направлена горизонтально. Стержень AB составляет с горизонтом угол в 30° , и, следовательно, угол между нормальной реакцией R_C этого стержня и горизонтальной осью x равен 60° ;

$$\sum X_k = R_D - R_C \cos 60^\circ = 0, \quad \sum Y_k = R_C \sin 60^\circ - G = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$R_C = \frac{G}{\sin 60^\circ} = \frac{600 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 400 \sqrt{3} \text{ Н} \approx 692 \text{ Н},$$

$$R_D = R_C \cos 60^\circ = 400 \sqrt{3} \cdot 0,5 = 200 \sqrt{3} \text{ Н} \approx 346 \text{ Н}.$$

Для определения приложенной к стержню AB силы P и реакции шарнира A рассмотрим равновесие стержня AB . К нему (рис. 79, в)

приложены: искомая вертикальная сила P , сила давления R'_C шара на стержень, равная по модулю и противоположная по направлению найденной выше реакции R_C стержня на шар, и неизвестная по величине и по направлению реакция шарнира A . Разложим последнюю на две составляющие: горизонтальную X_A и вертикальную Y_A . Выбрав оси координат и приняв за центр моментов точку A , находим проекции данной плоской системы произвольно расположенных сил на координатные оси и моменты их относительно точки A .

P_k	X_k	Y_k	$m_A(P_k)$
P	0	P	$P \cdot AE$
R'_C	$R'_C \cos 60^\circ$	$-R'_C \sin 60^\circ$	$-R'_C \cdot AC$
X_A	X_A	0	0
Y_A	0	Y_A	0

Прямоугольные треугольники ODA и OCA (рис. 79, а) конгруэнтны и, следовательно,

$$\angle OAC = \frac{\angle DAC}{2} = 30^\circ.$$

Из треугольника OAC находим плечо AC :

$$AC = r \operatorname{ctg} 30^\circ = 15 \sqrt{3} \approx 26 \text{ см},$$

$$AB = AC + CB = 26 + 120 = 146 \text{ см}.$$

Из чертежа (рис. 79, в) находим плечо AE :

$$AE = AB \cdot \cos 30^\circ = 146 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 126,6 \text{ см}.$$

Составляя уравнения равновесия и решая их, находим

$$\sum m_A(P_k) = P \cdot AE - R'_C \cdot AC = 0,$$

$$\sum Y_k = P - R'_C \sin 60^\circ + Y_A = 0, \quad \sum X_k = R'_C \cos 60^\circ + X_A = 0,$$

$$P = \frac{R'_C \cdot AC}{AE} = \frac{692 \cdot 26,2}{127} \approx 143 \text{ Н},$$

$$X_A = -R'_C \cos 60^\circ = -692 \cdot 0,5 = -346 \text{ Н},$$

$$Y_A = R'_C \sin 60^\circ - P = 400 \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 143 = 457 \text{ Н}.$$

Отрицательное значение реакции X_A показывает, что она в действительности направлена в сторону, противоположную предположенной, т. е. направлена влево.

Задача 32. Найти реакцию опор A , B и C трехопорной горизонтальной балки с промежуточным шарниром D (рис. 80). Расположение опор и вертикальных нагрузок на балку указано на чертеже, причем, по модулю последние равны между собой.

Решение. Балку AC можно считать составленной из двух балок: консольной балки AD и подвесной балки DC . Действие одной балки на другую, передаваемое через связывающий их шарнир D ,

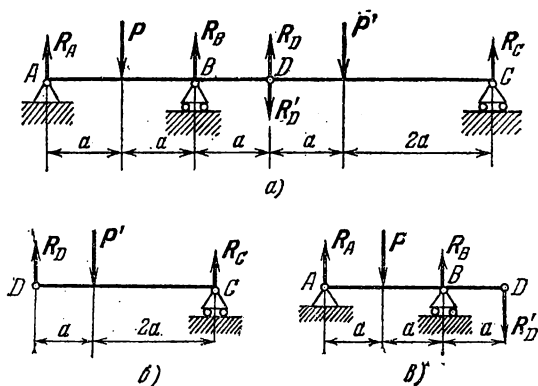


Рис. 80.

можно заменить реакциями шарнира R_D и R'_D . По закону равенства действия и противодействия сила R_D , с которой консольная балка действует на подвесную, равна по модулю и противоположна по направлению силе R'_D , с которой подвесная балка действует на консольную. Эти реакции, так же как и реакции всех опор, при данном расположении опор и направлении активных сил P и P' могут быть только вертикальными.

Из условий равновесия балки DC (рис. 80, б) находим

$$\sum m_D(P_k) = -Pa + R_C \cdot 3a = 0,$$

откуда $R_C = \frac{1}{3} P,$

$$\sum m_C(P_k) = -R_D \cdot 3a + P \cdot 2a = 0,$$

откуда

$$R_D = \frac{2}{3} P.$$

Сила давления подвесной балки на консольную

$$R'_D = R_D = \frac{2}{3} P.$$

Из условий равновесия консольной балки AD (рис. 80, θ) можно найти реакции двух других опор:

$$\sum m_A(P_k) = -P \cdot a + R_B \cdot 2a - R'_D \cdot 3a = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{P + 3R'_D}{2} = \frac{P + 3 \cdot \frac{2}{3} P}{2} = \frac{3}{2} P,$$

$$\sum P_k = R_A - P + R_B - R'_D = 0,$$

откуда

$$R_A = P + R'_D - R_B = P + \frac{2}{3} P - \frac{3}{2} P = \frac{1}{6} P.$$

§ 34 *. Определение усилий в стержнях фермы способом разрезов

Пусть мы имеем ферму (рис. 81, a), находящуюся в равновесии под действием приложенных к ней внешних сил: активных сил P_1 , P_2 , P_3 и реакций опор R_A и R_B .

Мысленно разрежем ферму (каким-нибудь сечением mn) на две части и отбросим одну из частей фермы, например правую. Для того чтобы равновесие оставшейся части фермы не нарушилось, мы должны, согласно принципу освобождаемости, заменить действие существовавших ранее связей их реакциями, т. е. реакциями S_6 , S_8 и S_7 перерезанных стержней на узлы D и F (рис. 81, b).

С таким же основанием, конечно, можно было бы отбросить левую часть фермы и заменить ее действие на оставшуюся правую часть фермы реакциями S'_6 , S'_8 и S'_7 тех же самых стержней, но уже на узлы E и G (рис. 81, θ) и, следовательно, противоположными реакциями S_6 , S_8 и S_7 этих стержней на узлы D и F .

Таким образом, любую из выделяемых частей фермы можно рассматривать как находящуюся в равновесии под действием приложенных к этой части внешних сил и реакций, перерезанных стержней на соответствующие узлы фермы. Ясно, что в целях большей простоты решения задачи удобнее выделять ту часть фермы, на которую действует меньшее число реакций.

Составляя для плоской системы сил, действующей на выделенную часть фермы, уравнения равновесия, мы

получаем возможность найти реакции соответствующих («перерезанных») стержней.

Преимущество данного способа перед способом вырезания узлов заключается в том, что он позволяет сразу определить реакцию любого стержня фермы, не определяя предварительно реакций других стержней, сходящихся в предшествующих узлах.

Так как для плоской системы сил мы можем составить только три независимых уравнения равновесия, то

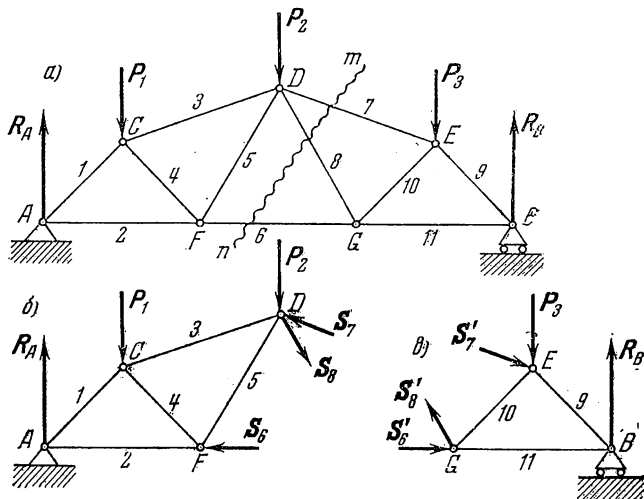


Рис. 81.

производить сечение фермы нужно таким образом, чтобы при этом перерезалось не более трех стержней с неизвестными реакциями.

Реакция стержня фермы может быть направлена только вдоль стержня, от узла, если стержень растянут, и к узлу, если он сжат. Для получения верного знака усилий будем считать предварительно все стержни растянутыми, т. е. будем направлять их реакции от узла. Знак минус перед численным значением найденной реакции будет указывать, что действительное ее направление обратно принятому, т. е. на то, что стержень сжат. Для определения искомых реакций стержней удобнее всего составлять уравнения равновесия в форме уравнений моментов, беря последовательно за центры моментов

точки, в которых пересекаются линии действия двух из трех неизвестных реакций¹⁾. В тех случаях, когда плечи сил относительно центров моментов аналитически вычислить затруднительно, их можно находить графически, вычертив схему рассматриваемой части фермы в определенном масштабе.

Если из трех стержней с определяемыми реакциями два параллельны и, следовательно, точка пересечения их лежит в бесконечности, вместо одного из уравнений моментов можно составить уравнение проекций сил на ось, перпендикулярную к параллельным стержням.

Задача 33. Дана мостовая ферма, изображенная на рис. 82, а, на которую действуют заданные вертикальные силы P_1 , P_2 и P_3 , причем $P_1 = P_2 = P_3 = P$. Требуется найти способом разрезав фермы усилия в стержнях 10, 11 и 12 фермы.

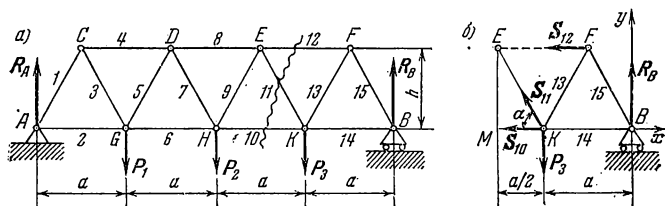


Рис. 82.

Решение. Прежде всего, как всегда при расчете ферм, определяем реакции опор. В данном случае они направлены вертикально вверх и равны по модулю:

$$R_A = R_B = \frac{3}{2} P.$$

Проведем сечение фермы через стержни 10, 11 и 12, реакции которых требуется определить, и отбросим левую часть фермы.

Для того чтобы после этого правая часть фермы оставалась в равновесии, к ней надо приложить реакции S_{10} , S_{11} и S_{12} перерезанных стержней на узлы K и F. Принимая предварительно стержни растянутыми, направляем эти реакции так, как показано на рис. 82, б. Составляем уравнения равновесия для системы сил P_3 , R_B , S_{10} , S_{11} и S_{12} , приложенных к выделенной части фермы.

Берем сумму моментов всех сил относительно точки K, в которой сходятся неизвестные реакции S_{10} и S_{11} :

$$\sum m_K(P_k) = S_{12}h + R_B a = 0,$$

откуда

$$S_{12} = -\frac{R_B a}{h} = -\frac{3a}{2h} P.$$

¹⁾ Способ разрезав фермы иногда называют поэтому способом моментных точек.

Отрицательное значение найденной величины S_{12} показывает, что реакция направлена в сторону, обратную предположенной, т. е. что стержень 12 сжат.

Берем сумму моментов всех сил относительно точки E , в которой сходятся неизвестные реакции S_{11} и S_{12} :

$$\sum m_E(\vec{P}_k) = R_B \frac{3}{2} a - S_{10} h - P_3 \frac{a}{2} = 0,$$

откуда

$$S_{10} = \frac{R_B 3a - P_3 a}{2h} = \frac{7a}{4h} P.$$

Стержень 10 растянут.

Так как стержни 10 и 12 параллельны и нельзя составить уравнения моментов, из которого были бы исключены реакции этих стержней, то в качестве третьего уравнения равновесия можно взять уравнение проекций на ось y (рис. 82, б), перпендикулярную к параллельным стержням:

$$\sum Y_k = R_B - P_3 + S_{11} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$S_{11} = \frac{P_3 - R_B}{\sin \alpha} = - \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Знак минус показывает, что стержень 11 сжат.

Угол α легко найти из прямоугольного треугольника EKM с катетами $EM = h$ и $MK = a/2$. Очевидно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{EM}{MK} = \frac{2h}{a}.$$

§ 35 *. Статически определенные и статически неопределенные задачи

Установленные для различных случаев расположения сил уравнения равновесия позволяют составить для каждого случая только определенное число независимых уравнений, налагающих соответствующие условия на систему находящихся в равновесии сил.

Мы можем, конечно, проектируя силы на различные оси и составляя уравнения моментов относительно различных центров, написать сколько угодно уравнений, но независимыми из них будут только три для общего случая плоской системы (когда силы расположены на плоскости произвольно) и только два для частных случаев плоской системы — сходящихся или параллельных сил на плоскости.

Сказанное можно пояснить хотя бы таким примером. Требуется определить реакции опор A , B и C не-

разрезной горизонтальной балки (рис. 83), лежащей на трех опорах. Расположение опор и вертикальных нагрузок на балку P_1 и P_2 указано на чертеже, причем по модулю последние равны между собой: $P_1 = P_2 = P$. Рассуждая так же, как и при решении задач 29 и 30, приходим к тому, что реакции R_A , R_B и R_C всех трех опор направлены вертикально. Таким образом, балка

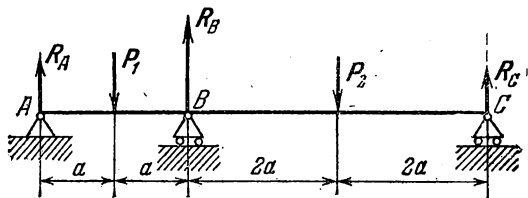


Рис. 83.

находится в равновесии под действием параллельных сил P_1 , P_2 , R_A , R_B и R_C . Одним из условий равновесия плоской системы параллельных сил может служить, как известно, уравнение

$$\sum (\pm P_k) = R_A - P + R_B - P + R_C = 0$$

или

$$R_A + R_B + R_C = 2P. \quad (\text{I})$$

За второе условие равновесия параллельных сил можно принять равенство нулю суммы моментов всех сил относительно какого угодно центра, лежащего в плоскости действия данных сил. Приняв за центры моментов точки опоры, можно написать:

$$\begin{aligned} \sum m_A(P_k) &= -Pa + R_B \cdot 2a - P \cdot 4a + R_C \cdot 6a = 0, \\ \text{или} \quad 2R_B + 6R_C &= 5P, \end{aligned} \quad (\text{II})$$

$$\begin{aligned} \sum m_B(P_k) &= -R_A \cdot 2a + Pa - P \cdot 2a + R_C \cdot 4a = 0, \\ \text{или} \quad -2R_A + 4R_C &= P, \end{aligned} \quad (\text{III})$$

$$\begin{aligned} \sum m_C(P_k) &= -R_A \cdot 6a + P \cdot 5a - R_B \cdot 4a + P \cdot 2a = 0, \\ \text{или} \quad 6R_A + 4R_B &= 7P. \end{aligned} \quad (\text{IV})$$

Однако, несмотря на кажущееся внешнее различие этих уравнений и уравнения (I), независимыми будут только любые два из четырех. В самом деле, вычтя из

уравнения (II) уравнение (III) и сократив полученное равенство на 2, приходим к уравнению (I). Сложив уравнения (II) и (IV) и сократив полученное равенство на 6, также будем иметь уравнение (I). Аналогично, сложив уравнения (III) и (IV) и сократив полученное равенство на 4, вновь получим уравнение (I).

В задаче нам неизвестны модули трех реакций опор. Следовательно, число неизвестных в задаче превышает число независимых уравнений равновесия, даваемых статикой абсолютно твердого тела, и при помощи только этих уравнений задача решена быть не может.

Задачи, в которых число неизвестных величин не превышает числа независимых уравнений равновесия, даваемых статикой твердого тела для данного случая

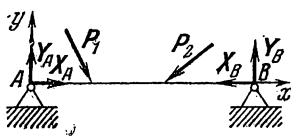


Рис. 84.

расположения сил, называются *статически определенными задачами*, в противном случае задачи называются *статически неопределенными*.

К числу статически неопределимых балок относятся не только неразрезные балки, лежащие на трех и более опорах, но и, например, балка, лежащая на двух шарнирно-неподвижных опорах и нагруженная силами, не перпендикулярными к оси балки (рис. 84). Число неизвестных, определяющих реакции такой балки, — четыре, а уравнений статики для сил, произвольно расположенных на плоскости, — только три.

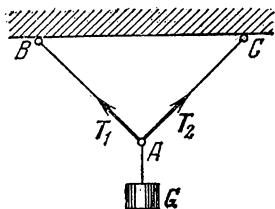


Рис. 85.

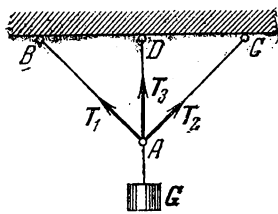


Рис. 86.

Если груз подвешен на двух нитях AB и AC (рис. 85), то мы можем найти реакции T_1 и T_2 этих нитей, рассматривая равновесие точки A. Три силы G , T_1 и T_2 , из которых неизвестны только величины сил T_1 и T_2 , должны удовлетворять двум уравнениям равновесия плоской системы сходящихся сил. Таким образом, число

неизвестных (два) равно числу уравнений (два), и задача является статически определенной.

Если же груз подвешен на трех нитях, расположенных в одной плоскости (рис. 86), то точка A будет находиться в равновесии под действием четырех сходящихся сил: G , T_1 , T_2 и T_3 . Незвестных по модулю сил мы будем иметь в этом случае три, тогда как независимых уравнений для плоской системы сходящихся сил мы можем составить только два. Таким образом, число неизвестных больше числа уравнений статики и данная задача является статически неопределенной.

Методы решения статически неопределенных задач рассматриваются в сопротивлении материалов, науке, строящейся на базе теоретической механики и изучающей зависимости между деформациями тел и действующими на них силами. Учет этих деформаций позволяет составить столько дополнительных уравнений, сколько нужно для того, чтобы общее их число, вместе с уравнениями статики абсолютно твердого тела, равнялось числу неизвестных в задаче.

ГЛАВА VI

ТРЕНИЕ

§ 36. Два основных вида трения

Трением называется сопротивление, возникающее при перемещении одного тела по поверхности другого.

В зависимости от характера этого перемещения (от того, скользит ли тело или катится) различают два рода трения: *трение скольжения*, или *трение первого рода*, и *трение качения*, или *трение второго рода*¹⁾.

Примерами трения скольжения могут служить: трение полозьев саней о снег, пилы о дерево, подошвы обуви о землю, втулки колеса об ось и т. д. Примерами трения качения служат: трение при перекатывании колес автомобиля по земле или вагона по рельсам, трение при перекатывании круглых бревен, трение в шариковых и роликовых подшипниках и т. д.

Трение является одним из самых распространенных явлений природы и играет очень большую роль в технике. Однако вследствие крайней сложности этого физико-механического явления и трудности оценки многочисленных факторов, на него влияющих, точных общих законов трения до сих пор установить не удалось. На практике в тех случаях, когда не требуется большой точности, все еще продолжают пользоваться эмпирическими законами, установленными в конце XVIII века (1781 г.) французским ученым Ш. Кулоном (1736—1806), хотя они и представляют собой лишь грубое приближение к действительности.

Если требуется большая точность, то приходится определять величину силы трения из опыта для каждой данной пары трущихся поверхностей и конкретных условий трения.

¹⁾ Иногда приходится учитывать еще один вид трения, так называемое трение верчения.

В теоретической механике мы условились рассматривать движение не реальных физических тел, а тел воображаемых — абсолютно твердых. Но без учета физических свойств соприкасающихся тел невозможно определить трение между ними. Поэтому учение о трении выходит, собственно говоря, за рамки теоретической механики, и если в ее курсе обычно все же рассматриваются элементы этого учения, то это делается лишь для того, чтобы уже при изучении теоретической механики иметь возможность применить ее положения к решению и таких практических задач, в которых нельзя пренебречь трением.

§ 37. Трение скольжения

Трением скольжения называется сопротивление скольжению одного тела по поверхности другого.

Основной причиной этого трения является то, что поверхности соприкасающихся тел не абсолютно гладки, а более или менее шероховаты; вследствие этого при перемещении одного тела по поверхности другого требуется некоторая сила для преодоления сопротивления микроскопических неровностей этих поверхностей. Приложение силы необходимо и для преодоления молекулярного взаимодействия между частицами поверхностных слоев соприкасающихся тел. Сила трения в той или иной мере возникает между всякими реальными поверхностями, сколь бы гладки они ни были.

Положим на неподвижную горизонтальную плоскость брусок весом G и будем действовать на него горизонтальной силой P , для чего привяжем к телу нить (ближе к основанию, чтобы уменьшить возможность опрокидывания) и, перекинув ее через блок, подвесим к ее концу чашки с гирями (рис. 87). До тех пор, пока модуль силы P не достигнет некоторого, определенного для данной пары соприкасающихся поверхностей и данного давления между ними, значения, брусок будет оставаться в покое. Это свидетельствует о том, что кроме нормальной реакции плоскости R_n , равной по модулю силе тяжести G бруска,

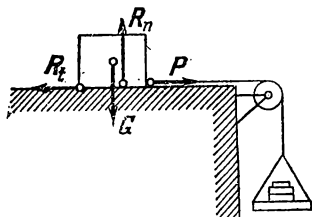


Рис. 87.

на него со стороны плоскости будет действовать еще другая реакция R_t , равная по модулю и противоположная по направлению горизонтальной силе P . Эта, лежащая в касательной плоскости, реакция R_t и есть, очевидно, сила трения, возникающая между поверхностью бруска и опорной плоскостью. Подобно тому как с увеличением веса G бруска будет увеличиваться модуль нормальной реакции R_n плоскости, так и с увеличением модуля силы P до некоторого предела, до тех пор пока брусок будет оставаться в равновесии¹⁾, увеличивается и модуль R_t силы трения. Максимального своего значения эта сила достигает в тот момент, когда брусок при некотором значении силы P начинает двигаться.

Сила трения, проявляющаяся при относительном покое тела, называется трением покоя, сила трения, действующая при скольжении тела, называется трением движения.

На основании многочисленных опытов Кулон установил следующие (приближенные) законы.

1. *Сила трения, при прочих равных условиях, не зависит от размеров трущихся поверхностей.*

Так, если в предыдущем опыте взять брусок, сделанный в форме параллелепипеда, имеющего грани одинаковой шероховатости, но неодинаковой площади, то модуль силы P , которую надо приложить к бруску для сообщения ему движения, не будет зависеть от того, на какую грань мы поставим брусок. Нужно заметить, что этот закон приближенно справедлив лишь до некоторой величины удельного давления, т. е. давления, приходящегося на единицу площади трущихся поверхностей. Так, если поставить брусок на ребро, то сила трения будет значительно больше.

2. *Как и величина всякой реакции, величина силы трения покоя зависит от приложенных сил и до некоторого предела всегда такова, что предотвращает скольжение тел друг по другу. Однако она не может быть больше некоторого, вполне определенного для каждого данного случая, максимального значения.*

¹⁾ Так как равные по модулю силы P и R_t лежат не на одной прямой, то они образуют пару. Момент этой пары уравнивается парой (G, R_n) . Вследствие перераспределения давления бруска на опорную плоскость, линия действия нормальной реакции R_n плоскости смещается, и она также не будет совпадать с линией действия силы G тяжести бруска (рис. 87).

3. Максимальная величина силы трения прямо пропорциональна силе нормального давления одного тела на другое.

Под силой нормального давления понимается сила давления, направленная по нормали к поверхности скольжения.

Сила нормального давления равна весу тела только в том случае, если поверхностью скольжения является горизонтальная плоскость и на тело никаких других сил, кроме силы его тяжести, не действует. Если тело лежит на наклонной плоскости (рис. 88), то на величину силы трения влияет уже не его вес, а лишь составляющая G_n силы тяжести, перпендикулярная к плоскости и равная по модулю ее нормальной реакции R_n .

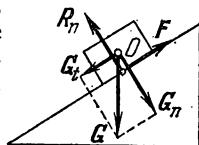


Рис. 88.

Если на тело кроме силы его тяжести действуют еще и другие силы (рис. 90), то под силой нормального давления тела на поверхность надо понимать нормальную составляющую равнодействующей всех приложенных к нему сил, которая равна по модулю нормальной реакции R_n поверхности скольжения.

4. Максимальная величина силы трения зависит как от материала и состояния трущихся поверхностей, так и от наличия и рода смазки между ними.

Так, трение металла по металлу меньше трения дерева по дереву, трение между сталью и бронзой меньше трения стали по стали и т. д. Трение тел тем меньше, чем глаже трущиеся поверхности, почему поверхности соприкосновения трущихся частей машин обычно шлифуются. Смазывание трущихся поверхностей весьма сильно уменьшает трение. Смазка заполняет собой все неровности трущихся поверхностей и располагается тонким слоем между ними, так что непосредственное трение поверхностей заменяется скольжением их по смазывающей жидкости и скольжением друг относительно друга отдельных слоев этой жидкости.

Если обозначить через F максимальное значение трения покоя, а через R_n нормальную реакцию опорной поверхности (равную по модулю силе нормального давления тела на опорную поверхность), то на основании данного закона будем иметь

$$F = f R_n, \quad (33)$$

где f — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом трения скольжения покоя*.

Из равенства $f = F/R_n$ следует, что коэффициент трения скольжения есть число безразмерное.

5. *Сила трения при движении меньше силы трения при покое.*

Опыт показывает, что для того, чтобы вывести тело из состояния покоя, нужно, при прочих равных условиях, преодолеть большую силу трения, чем при движении тела. Позднейшие опыты показали, что сила трения в движении зависит от скорости движения одного тела относительно другого и в большинстве случаев убывает с увеличением этой скорости, стремясь к некоторому пределу.

Величину силы трения при движении можно определить по формуле, аналогичной формуле (33), подставляя в нее вместо f — коэффициента трения при покое f' — коэффициент трения при движении.

Ориентировочные средние значения коэффициентов трения скольжения помещены в следующей таблице.

Материалы трущихся тел	Коэффициент трения			
	покою		движения	
	насухо	со смазкой	насухо	со смазкой
Сталь — сталь	0,15	0,1—0,12	0,15	0,05—0,1
Сталь — мягкая сталь	—	—	0,2	0,1—0,2
Сталь — чугун	0,3	—	0,18	0,05—0,15
Мягкая сталь — чугун	0,2	—	0,18	0,05—0,15
Сталь — бронза	0,15	0,1—0,15	0,15	0,1—0,15
Мягкая сталь — бронза	0,2	—	0,18	0,07—0,15
Чугун — чугун	—	0,18	0,15	0,07—0,12
Чугун — бронза	—	—	0,15—0,2	0,07—0,15
Бронза — бронза	—	0,1	0,2	0,07—0,1
Мягкая сталь — дуб	0,6	0,12	0,4—0,6	0,1
Мягкая сталь — вяз	—	—	0,25	—
Чугун — дуб	0,65	—	0,3—0,5	0,2
Чугун — вяз или тополь	—	—	0,4	0,1
Бронза — дуб	0,6	—	0,3	—
Дерево — дерево	0,4—0,6	0,1	0,2—0,5	0,07—0,15
Кожа лицевой стороны — дуб	0,6	—	0,3—0,5	—
Кожа бахтармой — дуб	0,4	—	0,3—0,4	—
Кожа — чугун	0,3—0,5	0,15	0,6	0,15
Резина — чугун	—	—	0,8	0,5

При грубых подсчетах часто не делают различия между коэффициентами трения при покое и при движении и пользуются значением коэффициента трения при движении. В расчетах же, требующих большой точности, силу трения приходится определять из опыта для каждой данной пары трущихся поверхностей и конкретных условий трения.

Задача 34. К валу (рис. 89) приложена пара с моментом $m = 800 \text{ Н} \cdot \text{м}$. На валу заклине́но тормозное колесо, диаметр которого равен $d = 40 \text{ см}$. Определить коэффициент трения покоя между колесом и колодками, если колодки прижимаются к колесу силами $Q = Q' = 10 \text{ кН}$.

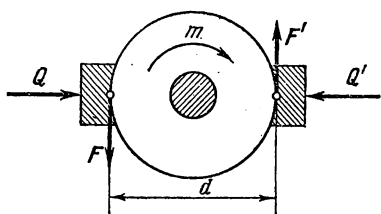


Рис. 89.

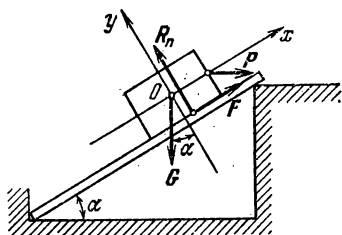


Рис. 90.

Решение. Колесо будет оставаться в покое, если момент m , приложенной к валу пары, уравновешивается моментом пары (F, F') сил трения между колесом и колодками. Условием равновесия колеса, следовательно, является равенство $Fd = m$.

Максимальная величина силы трения покоя между колесом и колодками

$$F = F' = fQ,$$

где $Q = Q'$ — силы нормального давления колодок на колесо. Подставляя значение силы F в первое равенство, будем иметь $fQd = m$. Отсюда

$$f = \frac{m}{Qd} = \frac{800}{10\,000 \cdot 0,4} = 0,2.$$

Задача 35. На дощатом деревянном настиле (рис. 90), образующем с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, находится груз весом $G = 1,5 \text{ кН}$, заключенный в деревянный ящик. Определить модуль горизонтальной силы P из условия, что груз находится в равновесии на наклонной плоскости. Коэффициент трения (дерево по дереву) f принять равным 0,4.

Решение. Определим сначала P_{\min} — минимальное значение силы P , необходимое для того, чтобы тело не скользило вниз по плоскости. Сила трения будет направлена в сторону, противоположную возможному движению, т. е. в данном случае вверх по плоскости.

Таким образом, тело находится в равновесии под действием сил G , P , F и R_n — нормальной реакции плоскости.

Проектируя все силы на оси y и x , направленные так, как показано на рис. 90, будем иметь

$$\sum Y_k = R_n - G \cos \alpha - P_{\min} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$R_n = G \cos \alpha + P_{\min} \sin \alpha,$$

$$\sum X_k = P_{\min} \cos \alpha + F - G \sin \alpha = 0.$$

Сила трения $F = fR_n = f(G \cos \alpha + P_{\min} \sin \alpha)$. Подставляя ее значение в предыдущее равенство, получим

$$P_{\min} \cos \alpha + fG \cos \alpha + fP_{\min} \sin \alpha - G \sin \alpha = 0.$$

Решая это уравнение относительно P_{\min} и подставляя данные, найдем

$$P_{\min} = \frac{G(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = \frac{1500(0,5 - 0,4 \cdot 0,866)}{0,866 + 0,4 \cdot 0,5} \approx 216 \text{ Н}.$$

Если модуль силы P будет меньше P_{\min} , то тело начнет скользить вниз. Если увеличивать модуль силы P , то до его предельного значения P_{\max} равновесие тела на плоскости будет еще сохраняться, так как сила F трения в этом случае будет уже направлена по плоскости вниз, в сторону, противоположную той, которая показана на рис. 90 (сила трения всегда направлена в сторону, противоположную возможному движению). Уравнения равновесия останутся прежними, только знак перед проекцией силы F на ось x изменится на противоположный, и мы будем иметь

$$P_{\max} = \frac{G(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \approx 1900 \text{ Н}.$$

Соединяя теперь оба полученных решения, мы видим, что груз будет оставаться на наклонной плоскости в равновесии при всех значениях модуля силы P , заключенных в пределах от 216 Н до 1900 Н. При $P > 1900$ Н груз будет подниматься по плоскости, а при $P < 216$ Н — опускаться. При всяком значении силы P , большем 216 Н, но меньшем 1900 Н, эта сила будет достаточной, чтобы не давать грузу идти вниз, но слишком малой, чтобы двигать его вверх.

Необходимо заметить, что вообще условия равновесия тел при наличии трения выражаются неравенствами, а потому задачи на равновесие таких тел имеют не одно, а множество решений. Определенное решение получается лишь при рассмотрении предельных случаев равновесия, в которых тело находится уже на границе между относительным покоем и движением или когда тело находится в движении.

Задача 36. Валки прокатного стана (рис. 91, а) вращаются в противоположные стороны и втягивают прокатываемый лист вследствие трения между ними и листом. Каково должно быть расстояние a между валками для того, чтобы на стане можно было прокатывать листы толщиной $b = 10$ мм? Радиус валков $r = 30$ см, а ко-

коэффициент трения для раскаленного железа и чугунных валков $f = 0,1$.

Решение. К листу приложены следующие силы: нормальные реакции валков R_{1n} и R_{2n} , направленные по радиусам O_1A и O_2B , и силы трения F_1 и F_2 , направленные по касательным к валкам в точках A и B . В силу симметрии очевидно, что $R_{1n} = R_{2n}$, а следовательно, равны по модулю и силы трения $F_1 = fR_{1n}$ и $F_2 = fR_{2n}$. В дальнейшем положим $R_{1n} = R_{2n} = R_n$ и $F_1 = F_2 = F = fR_n$. Нормальная реакция R_n каждого валка разлагается (рис. 91, б) на вертикальную составляющую $R_n'' = R_n \cos \alpha$ и горизонтальную $R_n' = R_n \sin \alpha$. Аналогично разлагаются и силы трения на горизонтальную составляющую $F' = F \cos \alpha = fR_n \cos \alpha$ и вертикальную $F'' = F \sin \alpha = fR_n \sin \alpha$. Для возможности вытягивания листа и процесса прокатки необходимо, очевидно, чтобы сумма горизонтальных составляющих сил трения была не меньше суммы соответствующих составляющих нормальных реакций валков, т. е. чтобы имело место неравенство $F' \geq R_n'$, или $fR_n \cos \alpha \geq R_n \sin \alpha$. Отсюда $f \geq \operatorname{tg} \alpha$. Выразим $\operatorname{tg} \alpha$ через заданные размеры и толщину листа. Из рис. 91, а имеем

$$O_1O_2 = 2r + a = b + 2r \cos \alpha,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{2r + a - b}{2r}.$$

Выражая $\cos \alpha$ через $\operatorname{tg} \alpha$ и заменяя последний величиной f , будем иметь

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f^2}} \leq \cos \alpha.$$

Подставляя это значение в предыдущее равенство, найдем

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f^2}} \leq \frac{2r + a - b}{2r},$$

откуда и определяется искомое расстояние между валками:

$$a \geq \frac{2r}{\sqrt{1 + f^2}} + b - 2r.$$

Подставляя данные, получим $a \geq \frac{2 \cdot 300}{\sqrt{1 + 0,1^2}} + 10 - 2 \cdot 300$, или $a \geq 7$ мм.

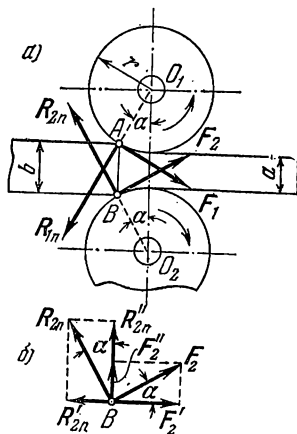


Рис. 91.

§ 38. Угол и конус трения

Представим себе тело, опирающееся на шероховатую поверхность (рис. 92). Если бы поверхность была абсолютно гладкой, то она представляла бы собой идеальную связь, действие которой на тело сводилось бы, как мы знаем, к одной лишь нормальной реакции R_n . Если же опорная поверхность шероховатая, то появится еще сила трения, лежащая в касательной плоскости и

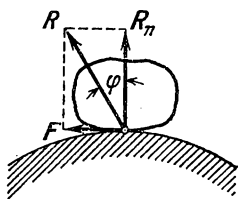


Рис. 92.

направленная в сторону, противоположную той, в которую мы движем или пытаемся сдвинуть тело. Если мы будем рассматривать критический момент (когда тело будет находиться, так сказать, на грани между покоем и движением), то для этого случая сила трения будет иметь максимальное значение $F = fR_n$. Две реакции: нормальная R_n и касательная (сила трения) F , складываясь по правилу параллелограмма, дадут полную реакцию R опорной поверхности, которая теперь будет уже составлять некоторый угол φ с нормалью к этой поверхности.

Наибольший угол φ , на который вследствие трения отклоняется от нормали реакция R шероховатой поверхности, называется углом трения.

Из рис. 92 имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{R_n}.$$

Но, как это видно из формулы (33),

$$\frac{F}{R_n} = f.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \quad (34)$$

Тангенс угла трения равен коэффициенту трения скольжения.

Если мы рассматриваем тело, имеющее возможность перемещаться по шероховатой опорной поверхности в любом направлении, то линии действия возможных реакций R этой поверхности образуют (рис. 93) коническую поверхность.

Конус, образующие которого наклонены под углом трения φ к нормали к поверхности скольжения в данной точке, называется конусом трения.

Если коэффициент трения при движении тела в различных направлениях по данной поверхности одинаков, то полная реакция R этой поверхности отклоняется от нормали во всех направлениях на одинаковый угол трения φ и конус трения будет круглым с углом при вершине, равным 2φ . Если же, как иногда бывает (например, при трении по дереву вдоль и поперек волокон), коэффициент трения при движении тела в разных направлениях имеет различные значения, то конус трения будет некруглым.

Пусть действующие на тело силы (включая и его вес) приводятся к одной равнодействующей силе P , проходящей через точку A касания тела с поверхностью и образующей с нормалью к поверхности в этой точке угол α (рис. 93). Перенесем эту силу по линии ее действия в точку A и разложим ее на две составляющие: P_1 , лежащую в касательной плоскости, и P_2 , направленную по нормали к поверхности. Тогда согласно формулам (33) и (34) максимальное значение силы трения покоя будет

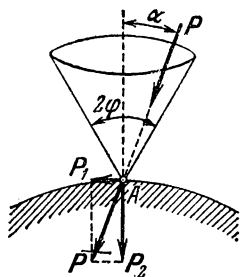


Рис. 93.

$$F = fP_2 = P_2 \operatorname{tg} \varphi,$$

где φ — угол трения, а P_2 — модуль силы нормального давления тела на поверхность (равный, очевидно, модулю R_n ее нормальной реакции).

Модуль же силы P_1 , стремящейся заставить скользить тело по поверхности, будет $P_1 = P_2 \operatorname{tg} \alpha$.

Для того чтобы тело оставалось на поверхности в равновесии, необходимо соблюдение условия $P_1 \leq F$ или, если подставить значения P_1 и F в это неравенство, $P_2 \operatorname{tg} \alpha \leq P_2 \operatorname{tg} \varphi$. Отсюда получаем, что условием равновесия тела на поверхности будет $\alpha \leq \varphi$. Если увеличивать модуль силы P , оставляя неизменным ее направление, то пропорционально будет увеличиваться не только модуль P_1 движущей силы, но и модуль P_2 силы

нормального давления, а это неизбежно влечет за собой и соответствующее увеличение силы трения, и тело по-прежнему будет оставаться в равновесии. Тело придет в движение лишь тогда, когда модуль силы P_1 делается больше модуля силы F , а для этого нужно изменить направление силы P так, чтобы угол α сделался больше угла трения φ , т. е. чтобы сила P проходила вне конуса трения. Следовательно, если равнодействующая P всех сил, приложенных к телу, каков бы ни был ее модуль, проходит внутри конуса трения, то тело остается в покое; возникновение движения возможно лишь в том случае, когда эта равнодействующая проходит вне конуса трения. Этим замечательным свойством области, заключенной внутри конуса трения, и объясняется его название.

Задача 37. Плоскость OA (рис. 94) вращается на шарнире O , так что ее можно установить под любым углом к горизонту. На эту плоскость положено тело B весом G . При каком наибольшем угле α наклона плоскости тело будет оставаться в равновесии?

Решение. Тело будет находиться на плоскости в равновесии под действием следующих сил: силы G тяжести тела, нормальной реакции R_n плоскости и силы трения F . Проектируя эти силы на выбранные координатные оси x и y , получим уравнения равновесия

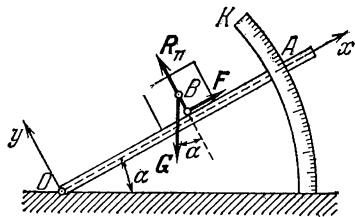


Рис. 94.

$$\sum X_k = F - G \sin \alpha = 0,$$

$$\sum Y_k = R_n - G \cos \alpha = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{R_n} = f = \operatorname{tg} \varphi,$$

где φ — угол трения.

Для равновесия тела необходимо, следовательно, соблюдение условия $\alpha \leq \varphi$ или $\alpha \leq \operatorname{arctg} f$.

Найденная зависимость дает один из способов определения коэффициента трения скольжения в покое. Постепенно увеличивая угол наклона плоскости, замечаем (по шкале K) тот угол α , при котором тело начинает скользить по плоскости. Тангенс этого угла даст нам искомый коэффициент трения для соответствующих материалов (тела и плоскости).

Аналогично решается задача об определении так называемого угла естественного откоса какого-нибудь грунта, т. е. такого наибольшего угла α наклона грунта к горизонту, при котором частицы грунта, находящиеся на откосе, остаются в равновесии $\alpha = \varphi = \operatorname{arctg} f$, где f — коэффициент трения между частицами грунта.

§ 39. Трение качения

*Трением качения называется сопротивление перека-
тыванию одного тела по поверхности другого.*

Сопротивление это возникает главным образом от-
того, что как само катящееся тело, так и тело, по ко-
торому оно катится, не являются абсолютно твердыми
и потому всегда несколько деформируются в месте их
соприкосновения.

Если лежащий на горизонтальной плоскости цилин-
дрический каток находится только под действием нор-
мального усилия \mathbf{G} (рис. 95), то деформации катка и
опорной плоскости будут симметричными относительно
линии действия силы \mathbf{G} . Приводя реакции плоскости,

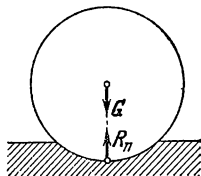


Рис. 95.

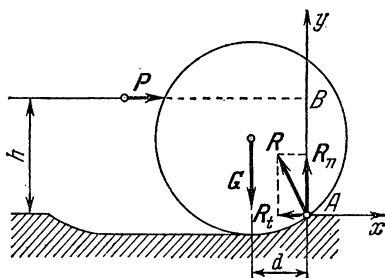


Рис. 96.

распределенные по малой площадке соприкосновения
катка с плоскостью, к одной равнодействующей \mathbf{R}_n , бу-
дем всегда получать ее равной по модулю и противо-
положной по направлению силе \mathbf{G} .

Если же на каток будет действовать на некоторой
высоте h еще и горизонтальная сила \mathbf{P} (рис. 96), то
деформации катка и опорной плоскости не будут уже
симметричны относительно линии действия силы \mathbf{G} .
Равнодействующая \mathbf{R} реакций плоскости, распределен-
ных по площадке соприкосновения ее с катком, сме-
стится в сторону возможного движения катка и будет
направлена по нормали к поверхности касания в не-
которой точке A .

Разложим эту неизвестную по величине реакцию \mathbf{R}
на горизонтальную \mathbf{R}_t и вертикальную \mathbf{R}_n составляющие
и применим условия равновесия к плоской системе сил

P , G , R_n и R_t , приложенных к катку:

$$\sum X_k = P - R_t = 0,$$

откуда

$$R_t = P,$$

$$\sum Y_k = -G + R_n = 0,$$

откуда

$$R_n = G,$$

$$\sum m_A(P_k) = Gd - P \cdot AB = 0.$$

Полагая вследствие малости деформации $AB = h$ и заменяя G численно равным ему значением R_n , будем иметь

$$Ph = R_n d.$$

Величина $R_n d$ называется моментом трения качения. Момент трения качения, как показывают опыты, возрастает с увеличением вращающего момента Ph , но не может превзойти некоторого значения, вполне определенного для данной пары соприкасающихся поверхностей и данной силы нормального давления катка на плоскость:

$$R_n d \leq k R_n,$$

где k — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом трения качения.

Таким образом, получаем следующее условие равновесия катка на горизонтальной плоскости:

$$Ph \leq k R_n,$$

откуда

$$P \leq \frac{k}{h} R_n, \quad (35)$$

где P — модуль горизонтальной силы, приложенной к катку, k — коэффициент трения качения для данной пары поверхностей (катка и опорной плоскости), h — высота приложения горизонтальной силы, R_n — модуль нормальной реакции плоскости или равный ему модуль силы нормального давления катка на плоскость.

Для случая предельного равновесия катка

$$P = \frac{k}{h} R_n. \quad (36)$$

Считая, как это принято, что при качении катка коэффициент трения катка не меняется, формулой (36) можно пользоваться и для определения силы, необходимой для равномерного перекачивания катка.

Коэффициент трения качения зависит от упругих свойств материалов трущихся тел и состояния их поверхностей. Для данной пары трущихся тел он является величиной постоянной.

Ориентировочные значения коэффициентов трения качения (для катка на плоскости) помещены в следующей таблице.

Материалы трущихся тел	Коэффициент трения k (см)
Мягкая сталь — мягкая сталь	0,005
Закаленная сталь — закаленная сталь	0,001
Чугун — чугун	0,005
Дерево — сталь	0,03—0,04
Дерево — дерево	0,05—0,08

В отличие от коэффициента трения скольжения, являющегося безразмерным числом, коэффициент трения качения, представляющий собой максимальную величину смещения d (рис. 96) нормальной реакции R_n опорной плоскости, измеряется в единицах длины; в формулы (35) и (36) значения k и h должны подставляться в одних и тех же единицах.

Для наиболее распространенного на практике случая приложения силы P к оси цилиндрического катка, полагая $h = r$, будем иметь следующее условие равномерного качения:

$$P = \frac{k}{r} R_n,$$

где r — радиус цилиндра.

Для случая приложения силы P на высоте, равной диаметру катка (например, при перемещении тяжелых грузов на катках), полагая $h = d$, будем иметь

$$P = \frac{k}{d} R_n,$$

где d — диаметр цилиндра.

Трение при качении в большинстве случаев значительно (во много раз) меньше, чем трение скольжения,

поэтому на практике всегда стремятся заменить там, где это возможно, скольжение качением. Так, когда нужно передвинуть какой-нибудь тяжелый предмет, под него часто подкладывают катки, по которым его и катят, вместо того чтобы просто тащить по земле или полу, т. е. заставлять его скользить.

На принципе замены трения скольжения трением качения основано и устройство широко применяемых в настоящее время роликовых и шариковых подшипников. Преимущество этих подшипников перед подшипниками скольжения, помимо значительно меньших потерь на трение, заключается еще и в том, что их сопротивление при пуске почти равно сопротивлению при установившемся движении (так как трение качения почти не зависит от скорости).

Нужно заметить, что, вообще говоря, цилиндр может не только катиться по опорной плоскости, но и скользить по ней.

1. Если $P \geq \frac{k}{h} R_n$, но $P < f R_n$ (где f — коэффициент трения скольжения), то цилиндр будет только катиться.

2. Если $P \geq f R_n$, но $P < \frac{k}{h} R_n$ (что бывает весьма редко, только при очень малом значении h), то цилиндр будет только скользить.

3. Если $P \geq \frac{k}{h} R_n$ и $P \geq f R_n$, то возможно как качение, так и скольжение цилиндра.

Задача 38. На рис. 97 показан шариковый подпятник, на который передается сила давления $Q = 100$ кН, диаметр шариков $d = 40$ мм. Определить модуль горизонтальной силы P , необходимой для преодоления трения в подпятнике, считая ее приложенной на расстоянии от оси вала, равном среднему радиусу кольца. Коэффициент трения качения шариков из закаленной стали по стали $k = 0,001$ см.

Решение. В данном случае имеет место трение качения, с одной стороны, между шариками и поверхностью неподвижного кольца подпятника, с другой стороны, между шариками и поверхностью подвижного (связанного с валом) кольца подпятника. Сила P передается на шарики на высоте их диаметров. Следовательно, величина искомой силы будет

$$P = 2 \frac{k}{h} R_n = 2 \frac{k}{d} Q = 2 \frac{0,01}{40} \cdot 100\,000 = 50 \text{ Н.}$$

Задача 39. Цилиндрический каток диаметром $d = 60$ см и весом $G = 3$ кН приводится в движение по горизонтальной плоскости

человеком, который давит на рукоятку AO с постоянной силой P в направлении AO ; длина $AO = 1,5$ м, высота точки A над горизонтом $h = 1,05$ м (рис. 98). Определить модуль силы P , необходимой для равномерного качения катка, если коэффициент трения качения $k = 0,5$ см.

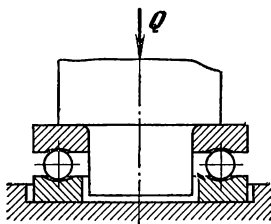


Рис. 97.

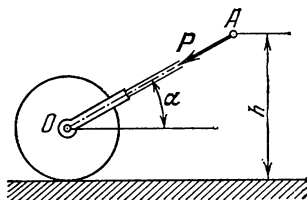


Рис. 98

Решение. Определим сначала угол, составляемый силой P с горизонтальной плоскостью:

$$\sin \alpha = \frac{h - r}{AO} = \frac{1,05 - 0,3}{1,5} = 0,5, \quad \alpha = 30^\circ.$$

Разлагаем силу P на горизонтальную составляющую P_1 , приводящую каток в движение, и вертикальную составляющую P_2 , вызывающую увеличение нормального давления катка на горизонтальную плоскость.

Горизонтальное усилие P_1 , приложенное к оси катка, определяется по формуле (36):

$$P_1 = P \cos \alpha = \frac{k}{r} R_n.$$

Нормальная реакция горизонтальной плоскости в данном случае будет равна

$$R_n = G + P_2 = G + P \sin \alpha.$$

Отсюда

$$P \cos \alpha = \frac{k}{r} (G + P \sin \alpha)$$

и

$$P = \frac{kG}{r \cos \alpha - k \sin \alpha} = \frac{0,5 \cdot 3000}{30 \cdot 0,866 - 0,5 \cdot 0,5} = 57 \text{ Н}.$$

ГЛАВА VII

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 40. Пространственная система сходящихся сил

Во многих случаях практики все силы, действующие на какие-либо сооружения или механизмы, приводятся к системе сил, лежащих в одной плоскости. Примеры этого мы видели во всех рассмотренных до сих пор задачах. Часто пространственная система сил может быть расчленена на несколько плоских систем.

Однако это имеет место далеко не всегда. Поэтому в статике приходится изучать приведение и равновесие систем сил, не лежащих в одной плоскости, так называемых *пространственных систем сил*.

Система нескольких сил, линии действия которых не лежат в одной плоскости, но пересекаются в одной точке, называется *пространственной системой сходящихся сил*. Так же как и плоскую систему сходящихся сил, такую систему можно свести к системе сил, приложенных

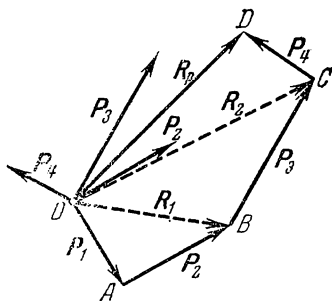


Рис. 99.

в одной точке. Пусть в точке O (рис. 99) приложено несколько сил, не лежащих в одной плоскости, например четыре силы P_1 , P_2 , P_3 и P_4 . Хотя все эти силы и не лежат в одной плоскости, но попарно каждые две из них непременно лежат в какой-либо одной плоскости, так как через две любые пересекающиеся прямые всегда

можно провести плоскость, и притом только одну. Таким образом, для сложения двух каких-либо сил такой системы, например для сложения сил P_1 и P_2 , мы можем применить правило сложения сходящихся сил на плоскости и найти их равнодействующую R_1 , приложенную в той же точке O . Проведя плоскость через эту равнодействующую и какую-либо третью силу P_3 , мы можем найти по тому же правилу треугольника равнодействующую R_2 трех сил P_1, P_2, P_3 и т. д.

Как видно из рис. 99, *равнодействующая пространственной системы сходящихся сил изображается по модулю и направлению замыкающей стороной многоугольника (OABCD), построенного на составляющих силах, т. е. является их геометрической суммой:*

$$R_P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4,$$

или

$$R_P = \sum P_k. \quad (37)$$

Необходимо иметь в виду, что силовой многоугольник, получающийся при сложении пространственной системы сил, не будет плоским. Неплоский многоугольник можно построить в действительности, например, из проволоки.

В частном случае *равнодействующая пространственной системы трех сходящихся сил изобразится по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах. (Правило параллелепипеда сил.)*

В самом деле, для трех сил P_1, P_2 и P_3 (рис. 100) диагональ OC соответствующего параллелепипеда есть замыкающая сторона OC пространственного многоугольника этих сил $OABC$.

Исходя из правила параллелепипеда, легко решить и обратную задачу — разложение силы по трем заданным направлениям, не лежащим в одной плоскости. Для этого, очевидно, достаточно построить параллелепипед, ребра которого имели бы заданные направления, а диагональю которого являлась бы заданная сила.

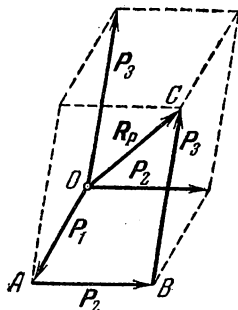


Рис. 100.

В случае, если тремя заданными направлениями будут направления осей координат (рис. 101), то составляющие \vec{OB} , \vec{OC} и \vec{OD} силы $\mathbf{P} = \vec{OA}$ соответственно равны по модулю абсолютным величинам проекций данной силы на оси пространственной системы координат¹⁾:

$$OB = |X|, \quad OC = |Y|$$

и

$$OD = |Z|,$$

откуда

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (38)$$

Модуль силы равен квадратному корню из суммы квадратов ее проекций на три любые взаимно перпендикулярные оси.

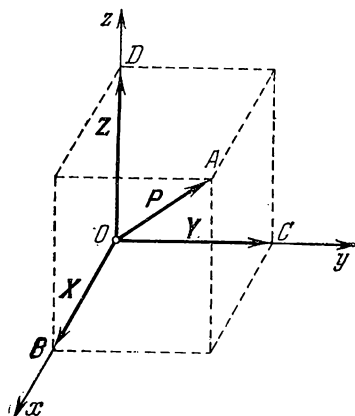


Рис. 101.

Ранее было доказано (§ 12), что проекция геометрической суммы векторов на любую ось равна алгебраической сумме проекций составляющих векторов на ту же ось. Так как это положение справедливо при любом (плоском или пространственном) векторном многоугольнике и равнодействующая системы сходящихся сил равна геометрической сумме векторов составляющих сил, то проекция равнодействующей системы сходящихся сил на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось:

$$R_{Px} = \sum X_k, \quad R_{Py} = \sum Y_k, \quad R_{Pz} = \sum Z_k.$$

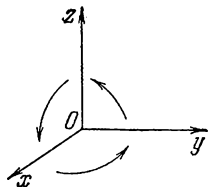


Рис. 102.

¹⁾ Мы будем пользоваться правой системой координат. Расположение осей в этой системе (рис. 102) может быть определено тремя пальцами правой руки: первые три пальца располагаются по трем взаимно перпендикулярным направлениям, причем большой палец указывает направление оси x , указательный — оси y и средний — оси z . В правой системе последовательный переход от оси x к оси y , от оси y к оси z и от оси z к оси x осуществляется против вращения часовой стрелки. Это направление вращения принимается при пользовании правой системы координат за положительное.

Отсюда, подставляя эти значения в формулу (38), будем иметь

$$R_P = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2 + (\sum Z_k)^2} \quad (39)$$

— выражение для модуля равнодействующей пространственной системы сходящихся сил.

Так как проекция силы на какую-нибудь ось равна модулю этой силы, умноженному на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси проекций, то

$$\begin{aligned} R_{Px} &= R_P \cos(\widehat{R_P, x}), & R_{Py} &= R_P \cos(\widehat{R_P, y}), \\ R_{Pz} &= R_P \cos(\widehat{R_P, z}). \end{aligned}$$

Отсюда получаются формулы, определяющие направления равнодействующей:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{R_P, x}) &= \frac{R_{Px}}{R_P} = \frac{\sum X_k}{R_P}, \\ \cos(\widehat{R_P, y}) &= \frac{R_{Py}}{R_P} = \frac{\sum Y_k}{R_P}, \\ \cos(\widehat{R_P, z}) &= \frac{R_{Pz}}{R_P} = \frac{\sum Z_k}{R_P}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Если система сходящихся сил находится в равновесии, то ее равнодействующая R_P должна, очевидно, быть равной нулю.

Так как равнодействующая является замыкающей стороной силового многоугольника, то для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на данных силах, был замкнутым. (Условие равновесия в геометрической форме.) Из формулы (39) ясно, что $R_P = 0$ в том случае, когда имеют место следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_k &= 0, \\ \sum Y_k &= 0, \\ \sum Z_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись

нулю суммы проекций всех сил на каждую из трех любых взаимно перпендикулярных осей.

В дополнение к сказанному в § 11 о проекции вектора на ось заметим, что для нахождения проекции вектора на ось, не лежащую с ним в одной плоскости, иногда бывает удобнее спроектировать сначала этот вектор на плоскость, в которой лежит данная ось, а затем уже найденную проекцию вектора на плоскость спроектировать на данную ось.

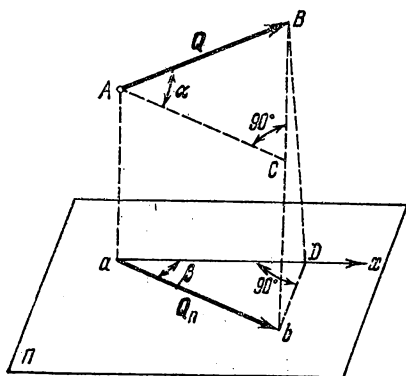


Рис. 103.

вать на данную ось (способ двойного проектирования). Так, например, проекция вектора Q на ось x (рис. 103) будет равна

$$\begin{aligned} Q_x &= aD = ab \cos \beta = \\ &= Q_n \cos \beta = \\ &= Q \cos \alpha \cos \beta. \quad (42) \end{aligned}$$

Мы установили ранее, что проекция вектора на ось есть скалярная алгебраическая величина. Проекция же вектора на плоскость есть величина векторная

и, следовательно, характеризуется не только своим численным значением, но и своим направлением на плоскости проекции. По модулю проекция вектора на плоскость (рис. 103)

$$Q_n = ab = AC = AB \cos \alpha = Q \cos \alpha,$$

где α — угол между направлением вектора Q и направлением его проекции Q_n на плоскость.

Задача 40. На станке обрабатывается вал (рис. 104). При помощи динамометра найдено, что в направлении продольной подачи резец испытывает сопротивление (осевое усилие) $P_y = 1$ кН, в направлении поперечной подачи (радиальное усилие) $P_x = 2,2$ кН и в вертикальном направлении — сопротивление $P_z = 5$ кН. Определить полную силу давления на резец.

Решение. Так как составляющие силы направлены по трем взаимно перпендикулярным прямым, то полная сила давления на резец изобразится диагональю прямоугольного параллелепипеда, построенного на ее составляющих. Отсюда находим модуль полной силы давления:

$$R_p = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = \sqrt{2,2^2 + 1^2 + 5^2} \approx 5,55 \text{ кН.}$$

Направление этой силы определится из формул

$$\cos(\widehat{R_P, x}) = \cos \alpha = \frac{P_x}{R_P} = \frac{220}{555},$$

$$\cos(\widehat{R_P, y}) = \cos \beta = \frac{P_y}{R_P} = \frac{100}{555},$$

$$\cos(\widehat{R_P, z}) = \cos \gamma = \frac{P_z}{R_P} = \frac{500}{555}.$$

Отсюда находим $\alpha = 66^\circ 40'$, $\beta = 79^\circ 40'$ и $\gamma = 25^\circ 40'$.

Задача 41. В точке A скрепления трех брусьев AB , AC и AD подвешен груз весом $G = 1$ кН (рис. 105). Найти усилия, сжимающие каждый из этих брусьев, если расстояние точки A от земли

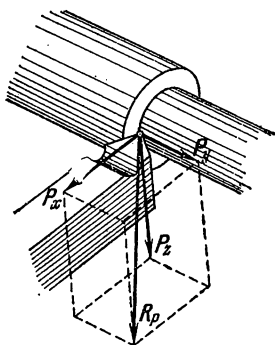


Рис. 104.

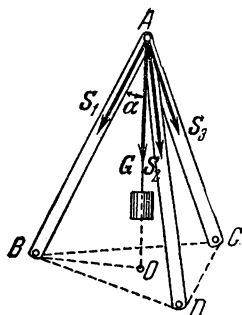


Рис. 105

$AO = 8$ м, а длина каждого бруса равна 10 м. Точки B , C и D находятся в вершинах равностороннего треугольника.

Решение. Для определения искомых усилий достаточно разложить силу G на три составляющие, направленные по AB , AC и AD , вследствие симметрии эти составляющие равны между собой. Обозначим модуль каждого сжимающего усилия через S , угол каждого из брусьев с вертикалью — через α .

Проектируя силы G и ее три составляющие S_1 , S_2 , S_3 (все с равным модулем S) на вертикаль, получим по теореме о проекции равнодействующей

$$G = 3S \cos \alpha,$$

откуда

$$S = \frac{G}{3 \cos \alpha}.$$

Определим угол α . Из прямоугольного треугольника OAB имеем

$$\cos \alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1000}{3 \cdot 0,8} = 417 \text{ Н.}$$

Задача 42. Стержень CD одним концом шарнирно прикреплен к вертикальной стене. Другой его конец поддерживается двумя горизонтальными цепями одинаковой длины AD и BD , прикрепленными к той же стене. На конце D подвешен груз весом $G = 1 \text{ кН}$.

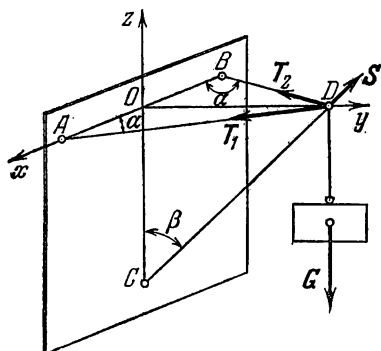


Рис. 106.

Найти усилие в стержне и натяжения цепей, если $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$ (рис. 106).

Решение. Сила G тяжести груза действует на точку D . Эта точка не свободная, связями служат стержень CD и цепи AD и BD . Освобождаемся от этих связей, заменяя их реакциями S (стержня) и T_1 и T_2 (цепей AD и BD).

Линии действия этих реакций известны, они совпадают с прямыми CD , AD и BD . Ясно, что стержень CD сжат¹⁾, и потому его реакция S направлена из точки C к точке D . Цепи же AD и BD растянуты, и потому их реакции T_1 и T_2

направлены от D к A и от D к B . В точке D , таким образом, сходятся четыре силы: G , S , T_1 и T_2 .

Силы эти находятся в равновесии и должны удовлетворять уравнениям равновесия (41). Проведем оси координат так, как показано на рис. 106, совместив плоскость yOz с плоскостью, в которой действуют силы G и S . При этом силы T_1 и T_2 будут лежать в координатной плоскости xOy и проекции сил на координатные оси находятся наиболее просто.

Сила	Проекция силы на оси		
	x	y	z
G	0	0	$-G$
S	0	$S \cos(90^\circ - \beta) = S \sin \beta$	$S \cos \beta$
T_1	$T_1 \cos \alpha$	$-T_1 \cos(90^\circ - \alpha) = -T_1 \sin \alpha$	0
T_2	$-T_2 \cos \alpha$	$-T_2 \cos(90^\circ - \alpha) = -T_2 \sin \alpha$	0

¹⁾ Если сразу не является очевидным, какой из стержней сжат и какой растянут, то можно предварительно считать все стержни растянутыми. Отрицательное значение реакции того или иного стержня, полученное в результате решения задачи, будет показывать, что действительное направление этой реакции противоположно принятому, т. е. что стержень сжат.

Проектируем все данные силы на координатные оси (см. таблицу) и составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X_k &= T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha = 0, \\ \sum Y_k &= S \sin \beta - T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha = 0, \\ \sum Z_k &= -G + S \cos \beta = 0.\end{aligned}$$

Подставляя числовые значения и решая систему уравнений, находим $S = 1,41 \text{ кН}$, $T_1 = T_2 = 578 \text{ Н}$.

Данную задачу, как и другие задачи о равновесии пространственных систем сходящихся сил, можно свести к задаче о равновесии плоской системы сходящихся сил. Из решения видно, что реакции T_1 и T_2 равны по модулю. Вследствие симметрии в расположении цепей AD и BD это обстоятельство можно было бы предвидеть и заранее. Равнодействующая T сил T_1 и T_2 , будет, очевидно, направлена по оси y от точки D к точке O , и решение задачи о равновесии пространственной системы сил G , S , T_1 и T_2 можно было бы свести к решению задачи о равновесии системы сил G , S и T , лежащих в одной плоскости yOz . После того как была бы найдена равнодействующая T , реакции цепей определить было бы уже легко простым разложением силы T по направлениям DA и DB .

Задача 43. Груз $G = 100 \text{ Н}$ (рис. 107, а) удерживается в равновесии тремя веревками: горизонтальной AO и двумя веревками BO и CO , причем плоскость двух последних наклонена к горизонтальной плоскости под углом $\alpha = 45^\circ$ и перпендикулярна к вертикальной плоскости, проходящей через веревку AO . Веревки BO и CO симметричны относительно этой вертикальной плоскости и образуют с нею углы $\beta = 30^\circ$. Определить натяжения веревок,

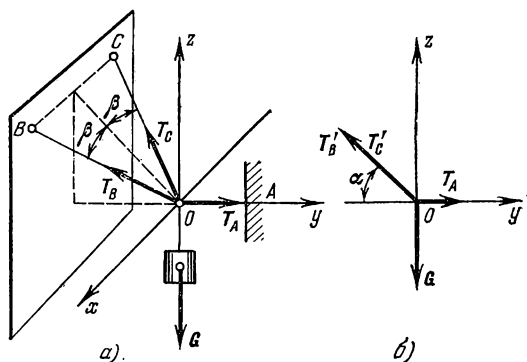


Рис. 107.

Решение. В точке O сходится пространственная система сил: сила G тяжести груза и реакции T_A , T_B и T_C веревок OA , OB и OC . Выбираем оси координат так, как показано на рис. 107, а, совместив плоскость yOz с вертикальной плоскостью симметрии.

Проекции сил G и T_A на координатные оси находятся просто. При проектировании же сил T_B и T_C на оси y и z воспользуемся

указанным выше (стр. 148) приемом двойного проектирования. Найдем сначала проекции T'_B и T'_C сил T_B и T_C на плоскость yOz , а затем уже эти проекции будем проектировать на оси y и z (рис. 107, б).

Очевидно, что модули векторов проекций сил T_B и T_C на плоскость yOz будут равны

$$T'_B = T_B \cos \beta \quad \text{и} \quad T'_C = T_C \cos \beta.$$

Теперь находим проекции всех сил на координатные оси.

Сила	Проекции силы на оси		
	x	y	z
G	0	0	$-G$
T_A	0	T_A	0
T_B	$T_B \cos (90^\circ - \beta) =$ $= T_B \sin \beta$	$-T'_B \cos \alpha =$ $= -T_B \cos \beta \cos \alpha$	$T'_B \cos (90^\circ - \alpha) =$ $= T_B \cos \beta \sin \alpha$
T_C	$-T_C \cos (90^\circ - \beta) =$ $= -T_C \sin \beta$	$-T'_C \cos \alpha =$ $= -T_C \cos \beta \cos \alpha$	$T'_C \cos (90^\circ - \alpha) =$ $= T_C \cos \beta \sin \alpha$

Составляем уравнения равновесия

$$\sum X_k = T_B \sin \beta - T_C \sin \beta = 0,$$

откуда $T_B = T_C$. Об этом можно было догадаться и сразу из соображений симметрии. Два других уравнения имеют вид

$$\sum Y_k = T_A - T_B \cos \beta \cos \alpha - T_C \cos \beta \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Z_k = -G + T_B \cos \beta \sin \alpha + T_C \cos \beta \sin \alpha = 0.$$

Подставляя числовые данные и решая систему уравнений, находим $T_B = T_C = 820$ Н, $T_A = 100$ Н.

§ 41. Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно какой-либо оси называется величина, характеризующая вращательный эффект данной силы относительно этой оси.

Начнем с конкретного примера.

Представим себе, что сила P , приложенная к телу, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, например к двери, вращающейся на петлях вокруг оси z (рис. 108), не лежит в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

Ясно, что составляющая P'' данной силы, параллельная оси вращения тела, не может сообщить ему вращательного движения; эта сила стремится только сдвинуть тело вдоль оси z ; вращательный эффект вызывает лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси вращения тела, составляющая P' (являющаяся проекцией данной силы P на плоскость, перпендикулярную к оси вращения тела). Следовательно, мерой вращательного эффекта действия силы P относительно оси z является момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к оси z , относительно точки пересечения O оси с указанной плоскостью. Этот момент называется моментом силы P относительно оси.

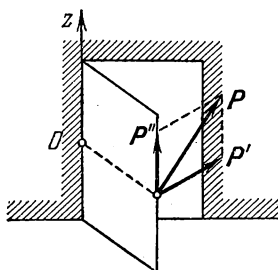


Рис. 108.

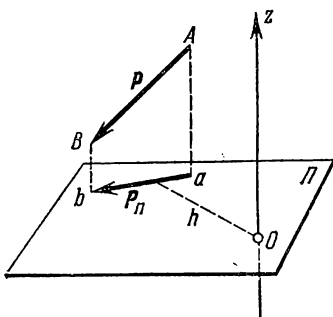


Рис. 109.

Итак, момент силы относительно оси равен моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к данной оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью. Понятие момента силы относительно оси является одним из важнейших понятий пространственной статики, поэтому надо твердо помнить его определение. Для того чтобы найти момент некоторой силы P относительно какой-либо оси z (рис. 109), нужно спроектировать эту силу на плоскость (Π), перпендикулярную к данной оси z , и затем взять момент этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Обозначая момент силы P относительно оси z символом $m_z(P)$, модуль проекции силы P на перпендикулярную к оси z плоскость — символом P_Π и плечо этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью — символом h , будем иметь

$$m_z(P) = m_O(P_\Pi) = \pm P_\Pi h. \quad (43)$$

Тот или другой знак в этой формуле определяется по следующему правилу: если для наблюдателя, смотрящего на плоскость Π с положительной стороны оси z (указанной стрелкой), проекция силы P на плоскость Π представляется вращающейся вокруг оси z против часовой стрелки, то момент считается положительным¹⁾; в противном случае его считают отрицательным.

Момент силы относительно оси вполне определяется своим численным значением и знаком и является, следовательно, скалярной алгебраической величиной.

Заметим, что

1) момент силы относительно данной оси не изменяется при перенесении силы вдоль ее линии действия, так как при этом не изменяется ни проекция силы на данную плоскость, ни ее плечо;

2) момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости.

При этом возможны два случая.

а) Сила параллельна оси. В этом случае равна нулю проекция силы на плоскость, перпендикулярную к оси.

б) Линия действия силы пересекает ось. Тогда проекция силы на плоскость проходит через точку пересечения оси с плоскостью и ее плечо относительно этой точки равно нулю.

Задача 44. Сбегающая ветвь ремня, действующая на окружности шкива диаметром $d = 400$ мм с силой $P = 400$ Н, отклонена от средней плоскости шкива MN на угол $\alpha = 20^\circ$. Определить момент силы относительно оси OO_1 вала (рис. 110).

Решение. Спроектируем силу P на плоскость MN , перпендикулярную к оси вала. Модуль этой проекции $P_\Pi = P \cos \alpha$. Расстояние ее до точки пересечения оси с плоскостью MN (т. е. до центра шкива) равно $d/2$. Таким образом, численное значение момента

$$m_{OO_1}(P) = P_\Pi \frac{d}{2} = P \frac{d}{2} \cos \alpha = 400 \cdot \frac{0,4}{2} \cdot \cos 20^\circ \approx 75,2 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Если бы средняя линия рассматриваемой части ремня совпадала со средней плоскостью шкива, то момент той же силы относительно оси вала равнялся бы

$$P \frac{d}{2} = 400 \cdot \frac{0,4}{2} = 80 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

¹⁾ Для силы P и оси z , изображенных на рис. 109,

$$m_z(P) = + P_\Pi h.$$

Задача 45. К двери, вращающейся около вертикальной оси Oz , в точке A приложена сила $P = 20$ Н под углом $\gamma = 60^\circ$ к вертикали; вертикальная плоскость, в которой лежит эта сила, образует с плоскостью двери угол $\alpha = 45^\circ$ (рис. 111). Определить момент силы P относительно оси Oz , если ширина двери $a = 0,5$ м.

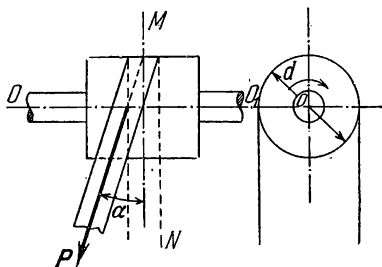


Рис. 110.

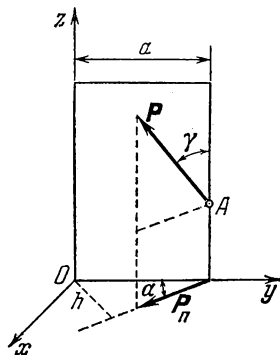


Рис. 111.

Решение. Проведем плоскость Oxy , перпендикулярную к оси Oz , и спроектируем силу P на эту плоскость; модуль этой проекции $P_{\Pi} = P \sin \gamma$. Из точки O пересечения оси с плоскостью опускаем перпендикуляр на линию проекции; длина этого перпендикуляра $h = a \sin \alpha$. Таким образом;

$$m_z(P) = -P_{\Pi}h = -aP \sin \alpha \sin \gamma =$$

$$= -0,5 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

§ 42. Условия равновесия системы сил, как угодно расположенных в пространстве

Способ приведения сил к одному центру, рассмотренный в § 26 для плоской системы сил, вполне применим и для системы сил, расположенных как угодно в пространстве.

Согласно теореме Пуансо (§ 22) всякую силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку тела, прибавляя при этом некоторую пару. Перенеся каждую из сил пространственной системы в одну какую-либо произвольную точку O (центр приведения), получим пространственную систему сходящихся в этой точке сил и пространственную систему пар, т. е. систему пар, расположенных в различных плоскостях.

Силы, приложенные к одной точке O , можно сложить по правилу силового многоугольника и заменить одной эквивалентной им силой $R_{\text{гл}}$, приложенной в той же точке O :

$$R_{\text{гл}} = \sum P_k.$$

Так же как и для плоской системы сил, *вектор $R_{\text{гл}}$, равный геометрической сумме всех данных сил пространственной системы, называется главным вектором этой системы.*

Модуль этой силы можно вычислить по формуле (39), установленной ранее для модуля равнодействующей пространственной системы сходящихся сил:

$$R_{\text{гл}} = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2 + (\sum Z_k)^2}.$$

Получающуюся при приведении пространственной системы сил к одному центру систему пар, расположенных в различных плоскостях, можно также заменить одной результирующей парой, момент M_O которой называется *главным моментом данной пространственной системы сил относительно выбранного центра приведения O .*

Существуют способы сложения пар, расположенных как угодно в пространстве. Пользуясь определенными правилами, можно найти не только модуль результирующей пары, но и плоскость, в которой будет расположена данная пара, и направление вращения пары в этой плоскости. Но для того, чтобы установить эти правила, нужно было бы ввести ряд понятий, выходящих за рамки программы курса теоретической механики для техникумов.

Как это доказывается в более подробных курсах механики, модуль M_O момента результирующей пары (модуль главного момента пространственной системы сил относительно выбранного центра O приведения)

$$M_O = \sqrt{[\sum m_x(P_k)]^2 + [\sum m_y(P_k)]^2 + [\sum m_z(P_k)]^2},$$

где $\sum m_x(P_k)$, $\sum m_y(P_k)$ и $\sum m_z(P_k)$ — алгебраические суммы моментов всех сил системы относительно трех любых взаимно перпендикулярных координатных осей (с началом координат в центре приведения).

Так как пара ни при каких условиях не может быть уравновешена одной силой, то для равновесия произ-

вольной пространственной системы сил необходимо и достаточно соблюдение тех же двух общих условий, что и для равновесия произвольной плоской системы сил.

Для равновесия системы сил, расположенных как угодно в пространстве, необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю как главный вектор $\mathbf{R}_{\text{гл}}$ этой системы, так и ее главный момент \mathbf{M}_O относительно произвольно выбранного центра приведения.

Этим условиям можно придать и более удобную для практических целей аналитическую форму. Из формул для модулей главного вектора $\mathbf{R}_{\text{гл}}$ и главного момента \mathbf{M}_O пространственной системы сил следует, что они обращаются в нуль в том случае, когда имеют место следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_k &= 0, & \sum Y_k &= 0, & \sum Z_k &= 0, \\ \sum m_x(\mathbf{P}_k) &= 0, & \sum m_y(\mathbf{P}_k) &= 0, & \sum m_z(\mathbf{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Для равновесия системы сил, расположенных как угодно в пространстве, необходимо и достаточно, чтобы порознь равнялись нулю суммы проекций всех сил на каждую из трех произвольно выбранных, но не лежащих в одной плоскости координатных осей и суммы моментов всех сил относительно каждой из трех таких осей.

Так как данные уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил даны без вывода, то приведем некоторые пояснения.

Вращательное действие всякой силы относительно какой-либо оси определяется, как мы знаем (§ 40), моментом этой силы относительно данной оси. Момент силы относительно оси есть скалярная алгебраическая величина, и вращательное действие системы сил относительно любой оси определяется алгебраической суммой моментов всех сил системы относительно этой оси.

Равенство нулю алгебраической суммы моментов всех сил системы относительно какой-либо оси говорит о том, что данная система сил не может сообщить телу вращения вокруг этой оси. Таким образом, последние три условия равновесия:

$$\sum m_x(\mathbf{P}_k) = 0, \quad \sum m_y(\mathbf{P}_k) = 0 \quad \text{и} \quad \sum m_z(\mathbf{P}_k) = 0,$$

означают, что рассматриваемая система сил не может сообщить телу вращения вокруг любой из трех не лежащих в одной плоскости осей координат. Последнее же равносильно тому, что данная система сил не может сообщить свободному твердому телу никакого вращательного движения вообще.

Что же касается первых трех уравнений равновесия: $\sum X_k = 0$, $\sum Y_k = 0$ и $\sum Z_k = 0$, то они означают, что данная система сил не может сообщить телу поступательного¹⁾ движения по направлению любой из трех не лежащих в одной плоскости осей координат. Последнее же равносильно тому, что данная система сил не может сообщить свободному твердому телу никакого поступательного движения вообще.

Таким образом, при соблюдении установленных шести уравнений равновесия, система сил, расположенных как угодно в пространстве, не может сообщить свободному твердому телу никакого поступательного и никакого вращательного движения, а потому не может и изменить состояние его движения (в частности, состояние покоя) вообще.

Заметим, что при составлении уравнений моментов нет необходимости в том, чтобы оси, относительно которых берутся моменты сил, совпадали с осями проекций. Для простоты решения уравнений рекомендуется ось проекций располагать перпендикулярно к линии действия одной из неизвестных сил, вследствие чего проекции этой силы исключаются из соответствующего уравнения проекций. Ось моментов рекомендуется выбирать лежащей в плоскости одной из неизвестных сил. Тогда момент этой силы относительно данной оси будет равен нулю. Одним словом, оси всегда нужно выбирать так, чтобы в каждое из шести уравнений равновесия вошло возможно меньшее число неизвестных.

Задача 46. Прямоугольная дверь, вращающаяся около вертикальной оси AB (рис. 112, a), открыта на угол $CAD = 60^\circ$ и удерживается в этом положении грузом $Q = 160$ Н, подвешенным на веревке CD , перекинутой через блок и концом C прикрепленной к двери, и некоторой силой P , приложенной в точке K двери и направленной перпендикулярно к ее плоскости. Вес двери $G = 480$ Н,

¹⁾ При поступательном движении тела (§ 64) все его точки движутся совершенно одинаково: по одинаковым траекториям и с одинаковой, в каждый данный момент, скоростью.

ее ширина $AC = AD = BE = 1,8$ м, высота $AB = 2,4$ м. Определить модуль силы P , а также реакции шарнира в точке A и подпятника в точке B , если $EK = 1,2$ м.

Решение. Дверь находится в равновесии под действием активных сил G, Q, P и реакций подшипника A и подпятника B . Проведем координатные оси, как показано на рис. 112, *а*, и разложим реакции связей на составляющие по этим осям. Так как цилиндрический шарнир A допускает скольжение двери в вертикальном направлении, то его реакция не будет иметь вертикальной составляющей и разлагается лишь на две составляющие R_1 и R_2 .

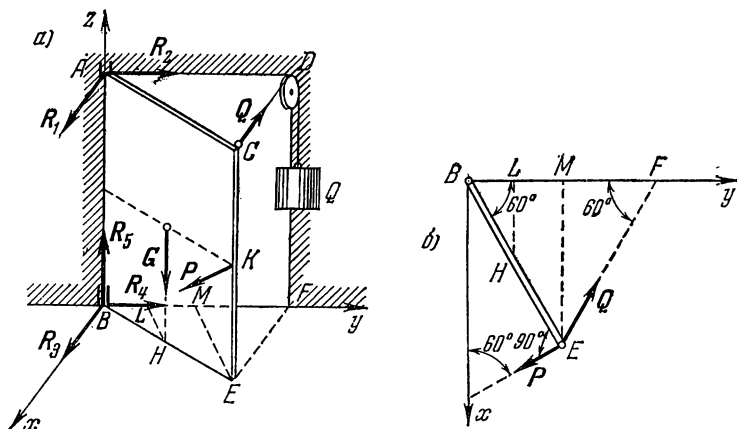


Рис. 112.

Реакция же подпятника B дает составляющие R_3, R_4 и R_5 , направленные по трем координатным осям. Расположение сил показано на рис. 112, *а*. Для удобства определения проекций и моментов сил Q и P проекции их на плоскость xBy показаны на рис. 112, *б*.

Составляем таблицу проекций всех сил на выбранные координатные оси x, y, z и моментов сил относительно этих осей.

Сила	Проекция силы на ось			Момент силы относительно оси		
	x	y	z	x	y	z
G	0	0	$-G$	$-G \cdot BL$	$G \cdot HL$	0
Q	$-Q \sin 60^\circ$	$Q \cos 60^\circ$	0	$-Q \cos 60^\circ \cdot AB$	$-Q \sin 60^\circ \cdot AB$	$Q \sin 60^\circ \cdot BE$
P	$P \cos 60^\circ$	$-P \sin 60^\circ$	0	$P \sin 60^\circ \cdot EK$	$P \cos 60^\circ \cdot EK$	$-P \cdot BE$
R_1	R_1	0	0	0	$R_1 \cdot AB$	0
R_2	0	R_2	0	$-R_2 \cdot AB$	0	0
R_3	R_3	0	0	0	0	0
R_4	0	R_4	0	0	0	0
R_5	0	0	R_5	0	0	0

Уравнения равновесия принимают вид

$$\sum X_k = -Q \sin 60^\circ + P \cos 60^\circ + R_1 + R_3 = 0,$$

$$\sum Y_k = Q \cos 60^\circ - P \sin 60^\circ + R_2 + R_4 = 0,$$

$$\sum Z_k = -G + R_5 = 0,$$

$$\sum m_x(\mathbf{P}_k) = -G \cdot BL - Q \cos 60^\circ \cdot AB + P \sin 60^\circ \cdot EK - R_2 \cdot AB = 0,$$

$$\sum m_y(\mathbf{P}_k) = G \cdot HL - Q \sin 60^\circ \cdot AB + P \cos 60^\circ \cdot EK + R_1 \cdot AB = 0,$$

$$\sum m_z(\mathbf{P}_k) = Q \sin 60^\circ \cdot BE - P \cdot BE = 0.$$

Из рис. 112, б находим

$$BL = BH \cos 60^\circ = \frac{BE}{2} \cdot \cos 60^\circ = \frac{1,8}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,45 \text{ м},$$

$$HL = BH \sin 60^\circ = \frac{1,8}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,45 \sqrt{3} \text{ м}.$$

Подставляя в уравнения все данные и решая их, получим

$$P = 80 \sqrt{3} \text{ Н}, \quad R_1 = -50 \sqrt{3} \text{ Н}, \quad R_2 = -110 \text{ Н},$$

$$R_3 = 90 \sqrt{3} \text{ Н}, \quad R_4 = 150 \text{ Н}, \quad R_5 = 480 \text{ Н}.$$

Отрицательные значения, полученные для R_1 и R_2 , показывают, что направления этих сил, указанные на рис. 112, надо изменить на противоположные.

§ 43. Уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил

Пользуясь общими уравнениями равновесия сил, расположенных как угодно в пространстве, можно найти уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил.

Пусть мы имеем систему параллельных сил $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ (рис. 113). Так как выбор координатных осей произволен, то возьмем ось z параллельной данным силам. Составим шесть уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил. Так как оси x и y перпендикулярны к данным параллельным силам, то проекции на эти оси каждой из сил данной системы будут равны нулю. Следовательно, при таком выборе координатных осей уравнения $\sum X_k = 0$ и $\sum Y_k = 0$ удовлетворяются независимо от того, находится ли система в равновесии или нет, а потому перестают быть условиями равновесия. Так как все данные силы парал-

лельны оси z , то проекции их на эту ось равны модулям этих сил, взятым со знаком плюс или минус в зависимости от того, в какую сторону они направлены. Следовательно, уравнение $\sum Z_k = 0$ можно заменить уравнением $\sum (\pm P_k) = 0$. Отпадает также и уравнение $\sum m_z(P_k) = 0$, так как моменты всех сил относительно параллельной им оси z будут всегда порознь равны нулю при любом значении сил и любом их расстоянии от оси z .

Таким образом, для системы параллельных сил остаются только три уравнения равновесия:

$$\sum (\pm P_k) = 0, \quad \sum m_x(P_k) = 0, \quad \sum m_y(P_k) = 0. \quad (45)$$

Для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраическая сумма всех сил и суммы моментов всех сил относительно каждой из двух осей, лежащих в плоскости, перпендикулярной к данным параллельным силам.

Произвольная система сил в пространстве, для равновесия которой требуется выполнение установленных в § 41 шести уравнений, является общим случаем расположения сил, приложенных к телу. Вы-

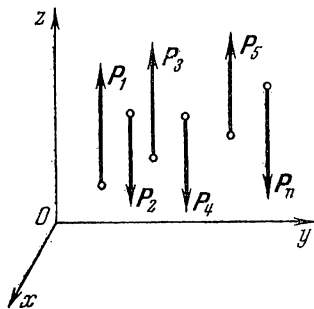


Рис. 113.

веденные нами ранее уравнения равновесия для частных случаев расположения сил можно было бы получить из данных шести уравнений, подобно тому как это было сделано выше для пространственной системы параллельных сил.

Для каждого случая расположения сил достаточным является вполне определенное число условий равновесия, и потому для каждого из них можно написать только определенное число независимых уравнений равновесия. Это важно помнить, так как при числе неизвестных, превышающем то число независимых уравнений, которое возможно составить для данного случая расположения сил, задача становится статически неопределенной.

На стр. 162 мы приводим таблицу, в которую сведены установленные выше аналитические условия равновесия

Система сил	Число независимых уравнений равновесия	Символическая запись уравнений равновесия
Произвольная пространственная система сил	6	$\sum X_k = 0, \quad \sum Y_k = 0, \quad \sum Z_k = 0,$ $\sum m_x(P_k) = 0, \quad \sum m_y(P_k) = 0,$ $\sum m_z(P_k) = 0$
Произвольная плоская система сил	3	1) $\sum X_k = 0, \sum Y_k = 0, \sum m_O(P_k) = 0$, или 2) $\sum m_A(P_k) = 0, \sum m_B(P_k) = 0,$ $\sum m_C(P_k) = 0$, если точки A, B и C не лежат на одной прямой, или 3) $\sum m_A(P_k) = 0, \sum m_B(P_k) = 0,$ $\sum X_k = 0$, если ось x не перпенди- кулярна к прямой AB
Пространственная система параллельных сил	3	$\sum P_k = 0, \sum m_x(P_k) = 0, \sum m_y(P_k) = 0,$ если оси x и y лежат в плоскости, перпендикулярной к силам
Плоская система параллельных сил	2	1) $\sum P_k = 0, \sum m_O(P_k) = 0$ или 2) $\sum m_A(P_k) = 0, \sum m_B(P_k) = 0$, если точки A и B не лежат на прямой, параллельной данным силам
Пространственная система сходящихся сил	3	$\sum X_k = 0, \sum Y_k = 0, \sum Z_k = 0$
Плоская система сходящихся сил	2	$\sum X_k = 0, \sum Y_k = 0$

для всех случаев расположения сил, приложенных к телу.

Задача 47. На платформе трехколесной тележки в точке K лежит груз $G = 1$ кН. Найти давление каждого колеса тележки на пол, пренебрегая ее собственным весом, если $O_1O_2 = 1$ м, $O_3D = 1,6$ м, $O_1E = 0,4$ м и $EK = 0,6$ м. Точка D лежит в середине отрезка O_1O_2 (рис. 114).

Решение. Тележка находится в равновесии под действием пространственной системы параллельных сил: силы тяжести груза G и реакций пола R_1 , R_2 и R_3 , соответственно равных производимым на него колесами давлениям. Имеем три неизвестных, и возможно составить три независимых уравнения равновесия.

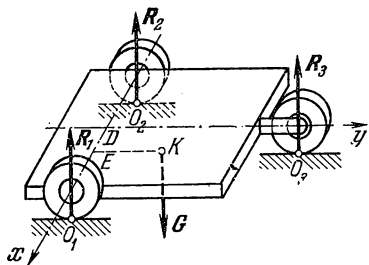


Рис. 114.

Возьмем в плоскости, перпендикулярной к линиям действия данных сил, оси x и y так, как показано на рис. 114, и найдем моменты всех данных сил относительно этих осей.

Сила	Моменты силы относительно осей	
	x	y
G	$-G \cdot EK$	$G \cdot ED$
R_1	0	$-R_1 \cdot O_1D$
R_2	0	$R_2 \cdot O_2D$
R_3	$R_3 \cdot O_3D$	0

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \sum P_k &= G - R_1 - R_2 - R_3 = 0, \\ \sum m_x(P_k) &= -G \cdot EK + R_3 \cdot O_3D = 0, \\ \sum m_y(P_k) &= G \cdot ED - R_1 \cdot O_1D + R_2 \cdot O_2D = 0. \end{aligned}$$

Подставляя данные и решая уравнения, получим

$$R_1 = 412,5 \text{ Н}, \quad R_2 = 212,5 \text{ Н}, \quad R_3 = 375 \text{ Н}.$$

Искомые давления колес на пол, очевидно, равны по модулю найденным реакциям.

§ 44. Равновесие тела, имеющего неподвижную ось

Все установленные выше условия равновесия являются условиями равновесия свободного твердого тела, т. е. такого тела, которое может беспрепятственно получать любое перемещение в пространстве.

На практике мы обычно имеем дело с телами несвободными, т. е. телами, свобода перемещения которых ограничена различного рода связями. Отбрасывая связи и заменяя их действия на тело соответствующими реакциями, как это мы всегда и делали при решении задач, мы можем всякое несвободное тело рассматривать как свободное и, следовательно, написать для него соответствующие уравнения равновесия свободного тела. В случае, если наложенные на тело связи закрепляют его не жестко, реакции связей войдут не во все уравнения равновесия тела.

Уравнения равновесия, не содержащие реакций связей, показывают, при каком соотношении между приложенными к телу активными силами или при каком положении тела возможно его равновесие, и служат условиями равновесия несвободного твердого тела.

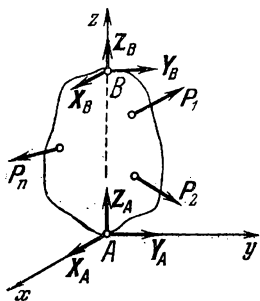


Рис. 115.

Остальные уравнения равновесия служат лишь для определения неизвестных реакций связей.

В качестве примера определения условий равновесия несвободного тела рассмотрим весьма важный случай равновесия тела,

имеющего две неподвижно закрепленные точки A и B или, что все равно, неподвижную ось, проходящую через эти точки. Очевидно, что единственно возможным движением данного тела будет его вращение вокруг оси AB .

Пусть к телу приложена произвольная пространственная система сил P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 115). Примем точку A , являющуюся одной из неподвижных точек тела, за начало координат и направим ось z по прямой AB . Расстояние между точками A и B обозначим через a . Неизвестные по модулю и направлению реакции закрепленных точек разложим на составляющие по осям координат. Обозначим эти составляющие соответственно через X_A, Y_A, Z_A и X_B, Y_B, Z_B .

Заменяя их реакциями, напишем шесть уравнений равновесия для свободного тела, находящегося под действием приложенной к нему пространственной

СИСТЕМЫ СИЛ:

$$1) \sum P_{kx} + X_A + X_B = 0,$$

$$2) \sum P_{ky} + Y_A + Y_B = 0,$$

$$3) \sum P_{kz} + Z_A + Z_B = 0,$$

$$4) \sum m_x(\mathbf{P}_k) - aY_B = 0,$$

$$5) \sum m_y(\mathbf{P}_k) + aX_B = 0,$$

$$6) \sum m_z(\mathbf{P}_k) = 0.$$

В этих уравнениях $\sum P_{kx}$, $\sum P_{ky}$, $\sum P_{kz}$ — суммы проекций на соответствующие оси всех активных сил, приложенных к телу, $\sum m_x(\mathbf{P}_k)$, $\sum m_y(\mathbf{P}_k)$, $\sum m_z(\mathbf{P}_k)$ — суммы моментов этих сил относительно соответствующих координатных осей.

Последнее, шестое уравнение равновесия является единственным уравнением, в которое не входят неизвестные реакции. Следовательно, единственным условием, которому должны удовлетворять активные силы, приложенные к телу, будет

$$\sum m_z(\mathbf{P}_k) = 0. \quad (46)$$

Для равновесия тела, имеющего неподвижную ось, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех действующих на него активных сил относительно неподвижной оси равнялась нулю.

Остальные пять уравнений равновесия служат для определения неизвестных реакций закрепленных точек.

Так как в общем случае сил, расположенных как угодно в пространстве, мы имеем шесть неизвестных составляющих реакций, то задача нахождения реакций двух закрепленных точек является, вообще говоря, задачей статически неопределенной.

Если же неподвижно закреплена лишь одна из точек, A , а другая, B , может свободно (без трения) скользить вдоль оси (как, например, точка A в задаче 46), то составляющая Z_B обращается в нуль и задача становится статически определенной.

Задача 48. Дифференциальный ворот состоит из барабана M радиуса r_1 и барабана N радиуса r_2 , вращающихся на общей оси AA_1 (рис. 116). На эти барабаны накинута веревка, охватывающая

подвижной блок, к которому подвешен груз весом Q . Вербка на-
вернута таким образом, что при вращении ворота она, сматываясь с
одного барабана, наматывается на другой. К рукоятке BC прило-
жена сила P_1 , перпендикулярная к плоскости ABC . К рукоятке B_1C_1
приложена сила P_2 , перпендикулярная к плоскости $A_1B_1C_1$ и равная
по модулю силе P_1 . Найти зависимость между модулями P и Q при

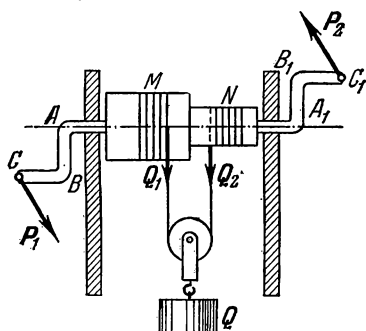


Рис. 116.

равновесии, если длина криво-
шипов AB и A_1B_1 равна l .

Решение. Пренебрегая
непараллельностью ветвей ве-
ревки, спускающихся с бараба-
нов M и N и охватывающих
подвижной блок, можно счи-
тать, что натяжение каждой из
них равно $Q_1 = Q_2 = Q/2$.
Применяя условие равновесия
тела, имеющего неподвижную
ось (46), получим

$$\begin{aligned} \sum m_{A_{A_1}}(P_k) = \\ = P_1 l - Q_1 r_1 + Q_2 r_2 + P_2 l = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание равенства $P_1 = P_2 = P$ и $Q_1 =$
 $= Q_2 = Q/2$, получим

$$P = \frac{r_1 - r_2}{4l} Q.$$

Задача 49. На валу трансмиссии насажены два шкива ремен-
ной передачи (рис. 117, а). Диаметры шкивов $D_1 = 40$ см, $D_2 =$
 $= 50$ см; от подшипника A эти шкивы находятся на расстоянии
 $a = 1$ м и $b = 3$ м; расстояние между подшипниками A и B равно
 $l = 4$ м. Ветви ремня, надетого на первый шкив, образуют с вер-
тикалью угол $\alpha = 20^\circ$; ветви ремня, надетого на второй шкив, го-
ризонтальны. Даны натяжения $T_1 = 2$ кН и $T_2 = 4$ кН ветвей пер-
вого ремня и натяжение $T_3 = 5$ кН верхней ветви второго ремня.
Найти, при каком натяжении T_4 нижней ветви второго ремня вал,
находясь под действием приложенных к нему сил, будет в равнове-
сии, а также определить реакции подшипников, вызываемые натя-
жением ремней.

Решение. Натяжение T_4 определяется сразу из условия рав-
новесия тела, имеющего неподвижную ось:

$$\sum m_y(P_k) = -T_3 \frac{D_2}{2} + T_4 \frac{D_2}{2} - T_1 \frac{D_1}{2} + T_2 \frac{D_1}{2} = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$T_4 = \frac{T_3 D_2 + (T_1 - T_2) D_1}{D_2} = \frac{5 \cdot 50 + (2 - 4) \cdot 40}{50} = 3,4 \text{ кН}.$$

Так как все силы расположены в плоскостях, перпендикулярных
к оси вала, то реакции подшипников не будут иметь составляющих,
направленных вдоль оси вала, т. е. составляющих по оси y . Со-
ставляющие искомых реакций подшипников A и B по осям x и z

обозначим соответственно через X_A, Z_A и X_B, Z_B . Для их определения спроектируем все силы, приложенные к валу (рис. 117.б), на оси x и z и найдем моменты их относительно этих осей (см. таблицу).

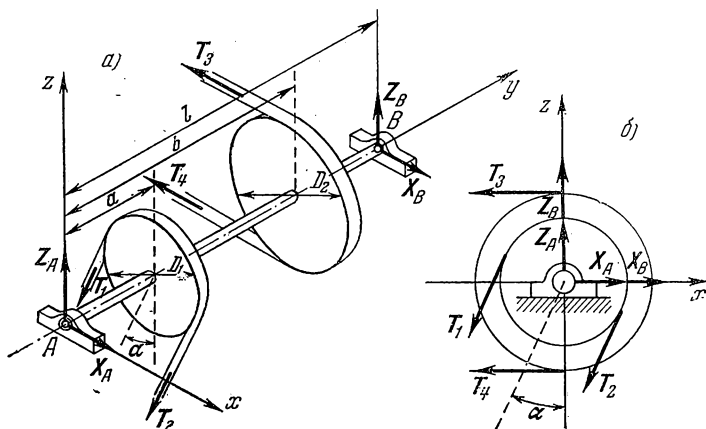


Рис. 117.

Составляя соответствующие уравнения равновесия, получим

$$\begin{aligned}\sum X_k &= -T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha - T_3 - T_4 + X_A + X_B = 0, \\ \sum Z_k &= -T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha + Z_A + Z_B = 0, \\ \sum m_x(P_k) &= -aT_1 \cos \alpha - aT_2 \cos \alpha + lZ_B = 0, \\ \sum m_z(P_k) &= aT_1 \sin \alpha + aT_2 \sin \alpha + bT_3 + bT_4 - lX_B = 0.\end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$X_B \approx 6,8 \text{ кН}, \quad X_A \approx 3,6 \text{ кН}, \quad Z_B \approx 1,4 \text{ кН}, \quad Z_A \approx 4,2 \text{ кН}.$$

Сила	Проекции силы на оси		Моменты силы относительно осей	
	x	z	x	z
T_1	$-T_1 \sin \alpha$	$-T_1 \cos \alpha$	$-T_1 \cos \alpha \cdot a$	$T_1 \sin \alpha \cdot a$
T_2	$-T_2 \sin \alpha$	$-T_2 \cos \alpha$	$-T_2 \cos \alpha \cdot a$	$T_2 \sin \alpha \cdot a$
T_3	$-T_3$	0	0	$T_3 b$
T_4	$-T_4$	0	0	$T_4 b$
X_A	X_A	0	0	0
Z_A	0	Z_A	0	0
X_B	X_B	0	0	$-X_B l$
Z_B	0	Z_B	$Z_B l$	0

ГЛАВА VIII

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛА

§ 45. Центр параллельных сил

Зная правила сложения двух параллельных сил, нетрудно путем последовательного сложения найти равнодействующую и для любой системы параллельных сил. Пусть, например, к телу приложены в точках A_1 , A_2 и A_3 три¹⁾ параллельные и направленные в одну сторону силы P_1 , P_2 и P_3 (рис. 118). Сложив сначала по соответствующему правилу две силы P_1 и P_2 , найдем их равнодействующую R_{12} . Складывая затем по тому же правилу силу R_{12} с силой P_3 , найдем равнодействующую R_P всех трех данных сил. Эта равнодействующая, очевидно, параллельна данным силам и направлена в ту же сторону. Модуль равнодействующей равен сумме модулей составляющих сил:

$$R_P = R_{12} + P_3 = P_1 + P_2 + P_3 = \sum P_k.$$

Остается определить положение точки C , через которую проходит линия действия равнодействующей. За точку приложения равнодействующей, конечно, может быть взята любая точка, лежащая на линии ее действия, но оказывается, что только одна из них, именно точка C , определенная путем последовательного сложения сил, обладает особым, весьма важным свойством.

Свойство это состоит в том, что если мы повернем все данные силы вокруг их точек приложения на одина-

¹⁾ Три силы взяты для простоты, но применяемый ниже метод может быть распространен на любое число параллельных сил.

ковый угол, не нарушая их параллельности, то линия действия их равнодействующей, повернувшись на тот же самый угол (как показано на рис. 118 штриховыми линиями), будет вновь проходить через точку C .

Если же ранее перенести точку приложения равнодействующей в какую-нибудь другую точку на линии ее действия, например в точку K , то после поворота данных сил линия действия их равнодействующей уже не проходила бы через эту точку.

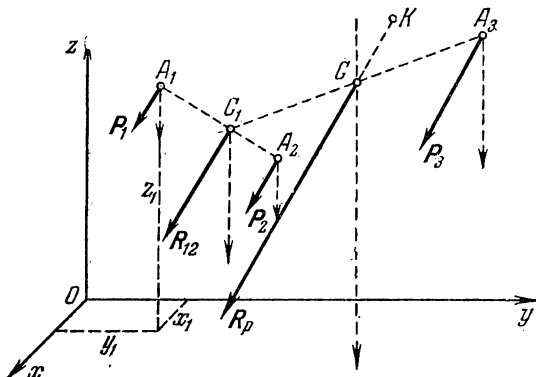


Рис. 118.

Точка C носит название центра системы параллельных сил.

Из сказанного выше следует, что *центром данной системы параллельных сил называется точка, через которую проходит линия действия их равнодействующей при любом повороте сил системы вокруг их точек приложения на один и тот же угол в одну и ту же сторону.*

Выведем теперь формулы для определения координат центра системы параллельных сил. Возьмем пространственную систему осей координат и обозначим координаты точек приложения данных сил: A_1 соответственно через x_1, y_1, z_1 , A_2 — через x_2, y_2, z_2 и A_3 — через x_3, y_3, z_3 .

Координаты центра параллельных сил C обозначим через x_c, y_c, z_c . Вычислим сначала абсциссу x' точки C_1 , к которой приложена равнодействующая R_{12} сил P_1 и P_2 . Воспользуемся для этого известной формулой аналитической геометрии для координат точки, делящей отрезок

в данном отношении m/n ; по этой формуле

$$x' = \frac{x_1 + \frac{m}{n} x_2}{1 + \frac{m}{n}},$$

где x_1 и x_2 — координаты концов данного отрезка.

Так как C_1 делит расстояние между точками приложения составляющих сил на части, обратно пропорциональные этим силам, то $A_1 C_1 / C_1 A_2 = P_2 / P_1$ и в нашем случае $m/n = P_2 / P_1$.

Следовательно,

$$x' = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}.$$

Найдем теперь абсциссу x_C точки C , в которой приложена равнодействующая данных сил R_P , т. е. абсциссу центра трех параллельных сил.

Так как

$$\frac{C_1 C}{C A_3} = \frac{P_3}{R_{12}} = \frac{P_3}{P_1 + P_2},$$

то в этом случае $m/n = P_3 / (P_1 + P_2)$; по той же формуле получим

$$x_C = \frac{(P_1 + P_2) x' + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3},$$

или, подставляя найденное выше для x' значение,

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{(P_1 + P_2) \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2} + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \\ &= \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{\sum P_k x_k}{\sum P_k}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно найти и другие координаты центра параллельных сил. Таким образом, получаем следующие формулы для координат центра системы параллельных сил:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum P_k x_k}{\sum P_k}, \\ y_C &= \frac{\sum P_k y_k}{\sum P_k}, \\ z_C &= \frac{\sum P_k z_k}{\sum P_k}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Формулы (47) для координат центра параллельных сил остаются верными для любого числа параллельных сил. В случае, если в систему входят силы противоположного направления, причем $\sum P_k \neq 0$, то под P_k надо понимать алгебраическое значение силы, т. е. ее модуль, взятый со знаком плюс при направлении силы в одну сторону и со знаком минус при направлении силы в противоположную сторону. Таким образом, в этих формулах под знаком \sum надо понимать алгебраическую сумму: в числителе — сумму произведений алгебраического значения каждой силы на соответствующую координату точки ее приложения, в знаменателе — алгебраическую сумму всех сил.

§ 46. Понятие о центре тяжести тела

По закону всемирного тяготения на все частицы тела, находящегося вблизи земной поверхности, действуют силы притяжения их к Земле, т. е. силы их тяжести¹⁾. Эти силы направлены по радиусу Земли и пересекаются приблизительно в ее центре; но так как расстояние до центра Земли чрезвычайно велико по сравнению с расстояниями между частицами тела обычных размеров, то с очень большой точностью можно считать силы тяжести всех отдельных частиц тела параллельными²⁾.

Равнодействующая сил тяжести всех отдельных частиц тела называется силой тяжести тела; модуль этой силы называется весом тела.

Как бы мы ни поворачивали тело и не изменяли его положение в пространстве, силы тяжести его отдельных частиц останутся параллельными друг другу (вертикальными); относительно тела они будут поворачиваться вокруг своих точек приложения, сохраняя свою параллельность и свою величину. Но при таком повороте

¹⁾ Сила тяжести частицы представляет собой, точнее, равнодействующую сил притяжения этой частицы к Земле и центробежной силы, вызываемой вращением частицы вместе с Землей. Наибольшее значение последняя сила имеет тогда, когда частица находится на экваторе (т. е. когда она наиболее удалена от оси вращения). Но и в этом случае центробежная сила частицы примерно в 300 раз меньше силы ее притяжения к Земле.

²⁾ При расстоянии между частицами в 31 м угол между соответствующими им вертикалями составляет всего лишь одну секунду.

равнодействующая параллельных сил всегда проходит через одну и ту же точку — центр данной системы параллельных сил. Отсюда следует, что центр тяжести находится в совершенно определенной для каждого тела точке и не изменяет своего положения относительно этого тела при изменении положения самого тела.

Центр тяжести тела есть такая, неизменно связанная с этим телом, точка, через которую проходит линия действия силы тяжести данного тела при любом положении тела в пространстве.

Заметим, что неправильно представлять себе центр тяжести как материальную частицу тела, к которой непосредственно приложена сила тяжести тела. Последняя есть равнодействующая, которой мы можем лишь условно заменить в задачах механики (и притом не во всех) действие на тело сил тяжести, приложенных к его элементарным частицам. Центр же тяжести тела есть лишь точка, через которую всегда проходит линия действия этой равнодействующей. Центр тяжести тела может лежать в точке, где вовсе нет материальных частиц, принадлежащих данному телу.

Так, например, центром тяжести однородного шара с концентрической полостью служит его геометрический центр, так как при любом положении шара через эту точку будет проходить равнодействующая сил тяжести его элементарных частиц.

§ 47. Координаты центра тяжести тела. Статический момент площади плоской фигуры

Так как центр тяжести тела есть центр параллельных сил тяжести его частиц, то его координаты определяются по формулам, аналогичным формулам (47):

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum G_k x_k}{\sum G_k} = \frac{\sum G_k x_k}{G}, \\ y_C &= \frac{\sum G_k y_k}{\sum G_k} = \frac{\sum G_k y_k}{G}, \\ z_C &= \frac{\sum G_k z_k}{\sum G_k} = \frac{\sum G_k z_k}{G}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где x_c, y_c, z_c — координаты центра тяжести тела, G_k — вес произвольной частицы тела, x_k, y_k, z_k — координаты этой частицы, $\sum G_k x_k, \sum G_k y_k, \sum G_k z_k$ — суммы, составленные из произведений веса каждой частицы тела на соответствующую координату этой частицы, G — вес всего тела.

Рассмотрим частный случай однородного тела, т. е. тела одинаковой плотности во всех его точках. Обозначая объем одной какой-нибудь частицы тела через v_k , объем всего тела через v и вес единицы объема тела через γ , получим вес одной частицы тела $G_k = v_k \gamma$ и вес всего тела $G = v \gamma$. Подставляя эти значения в предыдущую формулу, найдем

$$x_c = \frac{\sum G_k x_k}{G} = \frac{\sum v_k \gamma x_k}{v \gamma} = \frac{\gamma \sum v_k x_k}{v \gamma} = \frac{\sum v_k x_k}{v}.$$

Аналогичные формулы, очевидно, получаются и для двух других координат. Как видно из предыдущего выражения, для однородного тела координаты его центра тяжести не зависят от постоянной γ , характеризующей вещество данного тела, а зависят лишь от объема, занимаемого данным телом, и его формы.

Поэтому центр тяжести однородного тела называется *центром тяжести объема*. Его координаты

$$x_c = \frac{\sum v_k x_k}{v}, \quad y_c = \frac{\sum v_k y_k}{v}, \quad z_c = \frac{\sum v_k z_k}{v}. \quad (49)$$

Под x_k, y_k и z_k в этих формулах надо понимать координаты частицы тела.

На практике часто приходится определять положение центра тяжести плоских фигур. Такие фигуры можно представлять себе как тонкие однородные пластинки, толщиной которых можно пренебречь. Объемы отдельных частиц такой пластинки пропорциональны площадям соответствующих элементов фигуры, и координаты ее центра тяжести будут зависеть только от площади фигуры и ее формы.

Поэтому центр тяжести однородной тонкой пластинки постоянной толщины, имеющей очертание плоской фигуры, называется *центром тяжести площади* данной плоской фигуры.

Его координаты

$$x_C = \frac{\sum F_k x_k}{F}, \quad y_C = \frac{\sum F_k y_k}{F}, \quad (50)$$

где F_k — площадь произвольного элемента фигуры, x_k , y_k — координаты этого элемента, F — площадь всей фигуры.

Формулы (50) можно несколько видоизменить. Возьмем произвольную фигуру (рис. 119) и разобьем ее площадь на отдельные элементы F_k . Произведение площади элемента фигуры на кратчайшее расстояние¹⁾ ее центра тяжести до какой-нибудь оси, лежащей в той же плоскости, называется *статическим моментом элемента фигуры относительно данной оси*.

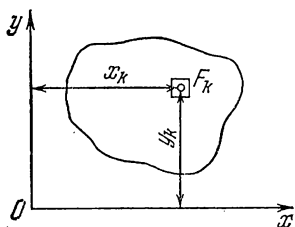


Рис. 119.

Сумма статических моментов всех отдельных элементов, на которые разбита данная площадь, взятых относительно какой-нибудь одной оси, называется *статическим моментом площади данной фигуры относительно этой оси*.

Обозначая статические моменты площади фигуры относительно координатных осей x и y соответственно через S_x и S_y , будем иметь

$$\begin{aligned} S_x &= \sum F_k y_k, \\ S_y &= \sum F_k x_k. \end{aligned} \quad (51)$$

Статический момент площади²⁾ имеет, очевидно, размерность длины в третьей степени (см^3 , мм^3 и т. д.), так как представляет собой произведение из величины площади, измеряемой в единицах длины в квадрате, на расстояние, измеряемое в единицах длины в первой степени. Заменяя принятыми обозначениями статических моментов площади числители формул (50), получаем

¹⁾ Это расстояние считается положительным по одну какую-либо сторону от оси и отрицательным — по другую.

²⁾ Статические моменты площади имеют применение в теории сопротивления материалов.

другие выражения для координат центра тяжести плоской фигуры:

$$x_C = \frac{S_y}{F}, \quad y_C = \frac{S_x}{F}. \quad (52)$$

По этим формулам вычисляются координаты центра тяжести плоской фигуры, если известны ее статические моменты относительно координатных осей, и, наоборот, сами статические моменты, если известно положение центра тяжести фигуры.

Если площадь поперечного сечения однородного тела одинакова по всей его длине и поперечные размеры очень малы по сравнению с длиной, то такое тело (например, какую-либо фигуру, сделанную из проволоки) можно рассматривать как материальную линию. Веса и объемы отдельных частей такого тела будут пропорциональны их длинам, и координаты центра тяжести его будут зависеть только от длины и формы этой линии.

Центр тяжести однородного тела, площадь поперечного сечения которого одинакова по всей его длине и мала по сравнению с нею, называется *центром тяжести линии*.

Его координаты

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{l}, \quad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{l}, \quad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{l}, \quad (53)$$

где l_k — элемент длины тела, x_k, y_k, z_k — координаты этого элемента и l — длина всего тела.

§ 48. Центр тяжести симметричного тела

Теорема. *Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести его лежит соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.*

Доказательство. Если данное тело симметрично относительно некоторой плоскости Π (рис. 120), то каждой частице тела по одну сторону этой плоскости соответствует равная ей по весу и симметрично расположенная частица по другую сторону плоскости.

Возьмем какую-нибудь частицу A_1 по одну сторону плоскости и найдем симметричную ей частицу A_2 по другую сторону.

На эти частицы будут действовать одинаковые по модулю силы тяжести G_1 и G_2 . Результирующая G этих двух равных и параллельных сил будет приложена в середине отрезка A_1A_2 , т. е. в плоскости симметрии.

Складывая подобным образом веса каждой пары симметричных частиц, мы получим систему параллельных сил, лежащих в плоскости симметрии тела. В этой же плоскости, очевидно, будет лежать и центр данной системы параллельных сил, т. е. центр тяжести тела.

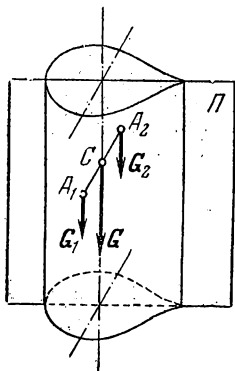


Рис. 120.

Для случаев, когда тело имеет ось или центр симметрии, теорема доказывается совершенно аналогично.

Следствия. 1. Центр тяжести отрезка материальной однородной прямой линии лежит в его середине.

2. Центр тяжести площади однородного параллелограмма лежит в точке пересечения его диагоналей, являющейся центром симметрии параллелограмма.

3. Центры тяжести площадей правильного многоугольника, круга, эллипса и объема шара лежат в их геометрических центрах.

§ 49. Положение центра тяжести некоторых однородных тел простейшей формы

1. Центр тяжести площади треугольника

Разобьем площадь треугольника (рис. 121) прямыми, параллельными основанию AB , на очень большое число очень узких полосок, которые можно рассматривать как отрезки материальной прямой линии. Центр тяжести каждого такого отрезка лежит в его середине; отсюда заключаем, что центр тяжести всей площади треугольника лежит где-то на линии, соединяющей середины этих отрезков, т. е. на медиане DE треугольника ABD .

Разбив площадь треугольника прямыми, параллельными какой-нибудь другой стороне, например BD , и рас-

суждая аналогичным образом, придем к выводу, что центр тяжести площади треугольника должен лежать на медиане AF . Следовательно, он лежит в точке пересечения медиан треугольника.

В геометрии доказывается¹⁾, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую из них в отношении $1:2$, т. е. эта точка лежит на медиане на расстоянии, равном одной трети медианы от точки пересечения медианы с соответствующей стороной. Поэтому можно сказать, что центр тяжести площади треугольника находится на его медиане на расстоянии одной трети медианы от точки пересечения медианы с соответствующей стороной треугольника.

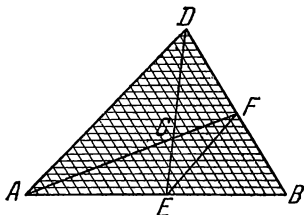


Рис. 121.

Для определения центра тяжести площади произвольного многоугольника разбиваем его на треугольники и определяем их центры тяжести. Считая вес каждого треугольника приложенным в его центре тяжести, находим затем центр системы полученных таким путем параллельных сил.

2. Центр тяжести дуги окружности

Пусть дана дуга AB окружности радиуса R с центральным углом 2α (рис. 122). Проведем через середину дуги радиус OD . Так как радиус OD является осью симметрии дуги, то искомый центр тяжести C лежит где-то на этом радиусе. Направим ось x по радиусу OD и примем центр O дуги за начало координат. В этом случае нам нужно найти лишь одну координату центра тяжести x_c . По формуле (53)

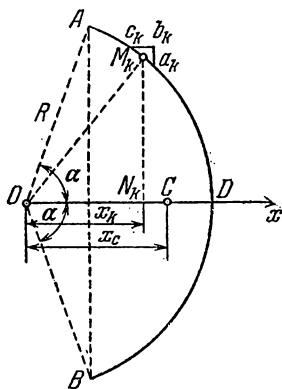


Рис. 122.

¹⁾ В этом нетрудно убедиться, рассмотрев подобие треугольников EFC и ACD и треугольников BEF и ABD .

координата x_C может быть выражена так:

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{l},$$

где l_k — элемент дуги окружности, x_k — его координата и l — длина всей дуги.

Разобьем дугу AB на очень большое число малых элементов l_k и проведем к середине одного из них радиус OM_k . Из конца его опустим перпендикуляр $M_k N_k$ на ось x . На элементе дуги построим прямоугольный треугольник $a_k b_k c_k$, катеты которого параллельны оси x и хорде AB (отрезок дуги $a_k b_k$ ввиду его малости можно считать прямолинейным).

Вследствие перпендикулярности сторон треугольник $a_k b_k c_k$ подобен треугольнику $OM_k N_k$.

Следовательно,

$$\frac{a_k c_k}{OM_k} = \frac{a_k b_k}{ON_k}.$$

В этом равенстве $a_k c_k = l_k$, $OM_k = R$ и ON_k — координата середины отрезка $a_k c_k$, т. е. координата x_k элемента l_k дуги.

Подставляя эти значения в найденную выше зависимость, получим $l_k/R = a_k b_k/x_k$, или $l_k x_k = R a_k b_k$. Проведая подобные построения для всех элементов дуги AB , найдем для каждого из них аналогичные равенства. Просуммировав почленно эти равенства и приняв во внимание, что сумма катетов $a_k b_k$ треугольников, построенных для всех элементов дуги, равна ее хорде AB , будем иметь

$$\sum l_k x_k = \sum R a_k b_k = R \sum a_k b_k = R \cdot AB.$$

Подставив это значение $\sum l_k x_k$ в формулу для координаты центра тяжести, получим

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{l} = \frac{R \cdot AB}{l}.$$

Из рис. 122 имеем $AB/2 = AO \cdot \sin \alpha$, или

$$AB = 2R \sin \alpha.$$

Длина же дуги $l = \overset{\frown}{AB}$ равна, как известно, радиусу, умноженному на центральный угол, выраженный в ра-

дианах. Следовательно, $l = 2\alpha R$. Подставив найденные значения AB и l в выражение для x_C и произведя сокращения, получим окончательно

$$x_C = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (54)$$

где R — радиус дуги окружности, α — половина соответствующего данной дуге центрального угла, выраженного в радианах.

3. Центр тяжести площади кругового сектора

Пусть дан круговой сектор $OADB$ радиуса R с центральным углом 2α (рис. 123).

Примем за начало координат центр круга O и направим ось x по радиусу OD , проведенному через середину дуги AB . Разобьем данный сектор на n равных элементарных секторов, т. е. секторов с очень малыми центральными углами. Вследствие малости дуг, ограничивающих эти секторы, последние можно рассматривать как равнобедренные треугольники, центры тяжести которых лежат на дуге окружности радиуса $OA_1 = r = \frac{2}{3}R$ (медиана элементарного треугольника совпадает с радиусом, проведенным в середину соответствующей элементарной дуги) на равных расстояниях друг от друга. Приложенные к этим центрам веса элементарных секторов вследствие равенства их площадей равны между собой. Задача сводится, очевидно, к определению центра равных параллельных сил, точки приложения которых равномерно распределены по дуге окружности A_1B_1 , т. е. в пределе, при неограниченном увеличении числа n элементарных секторов, к определению центра тяжести однородной дуги A_1B_1 . Как было установлено выше, ее центр тяжести лежит на оси симметрии Ox на

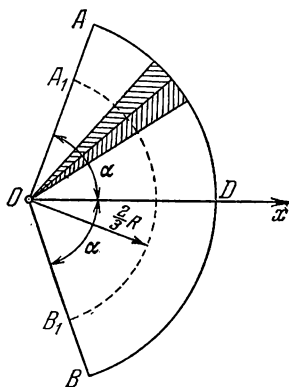


Рис. 123.

расстоянии

$$x_C = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

от центра круга.

В данном случае радиус этой дуги $r = OA_1 = \frac{2}{3} R$ и, следовательно, искомая координата центра тяжести площади кругового сектора будет определяться формулой

$$x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (55)$$

4. Центр тяжести объема призмы

Мысленно разобьем данную призму плоскостями, параллельными основанию, на большое число очень тонких пластинок одинаковой толщины. Вследствии малости толщины пластинок их можно принять за плоские многоугольники, центры тяжести которых лежат на одной и той же прямой O_1O_2 , соединяющей центры тяжести верхнего и нижнего оснований призмы. Приложенные к этим центрам веса многоугольников вследствие равенства их площадей равны между собой. Задача, таким образом, сводится к определению центра равных параллельных сил, точки приложения которых равномерно распределены по прямой O_1O_2 , т. е. в пределе, при неограниченном увеличении числа делений, к определению центра тяжести однородного отрезка O_1O_2 . Отсюда заключаем, что центр тяжести объема призмы лежит в середине отрезка, соединяющего центры тяжести ее верхнего и нижнего оснований. Так как цилиндр можно рассматривать как призму с бесконечным множеством боковых граней, то центр тяжести однородного цилиндра определяется по тому же правилу, что и для призмы.

§ 50. Определение положения центра тяжести фигур и тел сложной формы

1. Аналитический способ

Для определения положения центра тяжести фигур и тел сложной геометрической формы их разбивают на такие части простейшей формы (если, конечно, это возможно), для которых положение центров тяжести известно, а затем определяют положение центра тяжести

всей фигуры или тела по соответствующим формулам, установленным в § 47, понимая в этих формулах под v_k , F_k и l_k объемы, площади и длины частей, на которые разбито данное тело, фигура или линия, а под x_k , y_k и z_k — координаты центров тяжести этих частей.

Если рассматриваемые фигуры или тела неоднородны, т. е. если они состоят из частей различной плотности, то, разделив их на однородные части, умножают входящие в формулы (49), (50) и (53) объемы, площади и длины этих частей на соответствующий каждой части удельный вес. Если в данном теле или фигуре имеются полости или отверстия, то для определения центра тяжести такого тела или фигуры пользуются теми же приемами и формулами, считая при этом объемы и площади вырезанных частей отрицательными.

В технической практике широкое распространение имеет стальной прокат¹⁾ различного профиля, т. е. различной формы поперечного сечения. Форма этих поперечных сечений, так же как и их размеры, устанавливается государственными общесоюзными стандартами (ГОСТами). В таблицах так называемого нормального сортамента прокатной стали, имеющих в различного рода технических справочниках, приводятся для каждого калибра соответствующего профиля все необходимые сведения, в частности геометрические размеры профиля, площадь сечения, координаты центра тяжести и пр. Пользуясь этими данными, можно указанными выше приемами определить положение центра тяжести и составного сечения, полученного путем соединения нескольких стандартных профилей.

Задача 50. Найти положение центра тяжести симметричной стержневой фермы $ADBE$ (рис. 124), размеры которой таковы: $AB = 6$ м, $DE = 3$ м и $EF = 1$ м.

Решение. Так как ферма симметричная, то ее центр тяжести лежит на оси симметрии DF . При выбранной (рис. 124) системе координатных осей абсцисса центра тяжести фермы

$$x_c = AF = \frac{AB}{2} = 3 \text{ м.}$$

Неизвестной, следовательно, является лишь ордината y_c центра тяжести фермы. Для ее определения разбиваем ферму на отдельные

¹⁾ Изделия, получаемые на металлургических заводах путем обжатия стальных заготовок между вращающимися валками прокатных станов.

части (стержни). Длины их определяются из соответствующих треугольников. Из $\triangle AEF$ имеем $AE = BE = \sqrt{AF^2 + FE^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3,17$ м. Из $\triangle ADF$ имеем $AD = \sqrt{AF^2 + (DE + EF)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ м. Центр тяжести каждого стержня лежит в его середине. Ординаты этих центров легко определяются из чертежа (рис. 124).

Найденные длины и ординаты центров тяжести отдельных частей фермы заносим в таблицу и по формуле (53) определяем ординату y_C центра тяжести данной плоской фермы.

Части фермы	Длина l_k части (м)	Ордината y_k центра тяжести каждой части (м)
I	3,17	0,5
II	3,17	0,5
III	5	2
IV	3	2,5
V	3	2

$$y_C = \frac{\sum l_k y_k}{l} = \frac{3,17 \cdot 0,5 + 3,17 \cdot 0,5 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2,5 + 5 \cdot 2}{3,16 + 3,16 + 5 + 3 + 5} \approx 1,54 \text{ м.}$$

Следовательно, центр тяжести C всей фермы лежит на оси DF симметрии фермы на расстоянии 1,54 м от точки F .

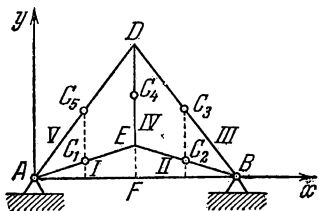


Рис. 124.

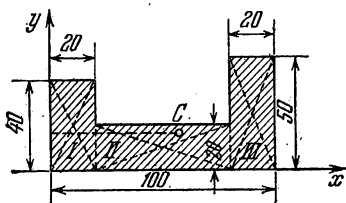


Рис. 125.

Задача 51. Найти статические моменты относительно координатных осей площади листа, размеры которого (в сантиметрах) указаны на рис. 125, и координаты центра тяжести этой площади.

Решение. Разобьем данную площадь на три прямоугольника. Центр тяжести каждого из прямоугольников лежит на пересечении его диагоналей. Координаты этих центров, так же как и площади прямоугольников, легко определяются из чертежа. Составляем таблицу и находим сначала статические моменты площади по форму-

Части площади	Площадь F_k каждой части (см ²)	Координаты центра тяжести каждой части (см)	
		x_k	y_k
I	800	10	20
II	1200	50	10
III	1000	90	25

нам (51), а затем и координаты ее центра тяжести по формулам (52)

$$S_x = \sum F_k y_k = 800 \cdot 20 + 1200 \cdot 10 + 1000 \cdot 25 = 53\,000 \text{ см}^3,$$

$$S_y = \sum F_k x_k = 800 \cdot 10 + 1200 \cdot 50 + 1000 \cdot 90 = 158\,000 \text{ см}^3,$$

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{158\,000}{800 + 1200 + 1000} = \frac{158\,000}{3000} \approx 52,7 \text{ см},$$

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{53\,000}{3000} \approx 17,7 \text{ см}.$$

Задача 52. Найти центр тяжести C площади кругового сегмента ADB радиуса $R = 30$ см, если угол $AOB = 2\alpha = 60^\circ$ (рис. 126).

Решение. Искомый центр тяжести C лежит на оси симметрии, проходящей через центр круга O и середину D дуги AB . Примем эту ось за ось x . Начало координат возьмем в точке O . Будем рассматривать данный круговой сегмент как состоящий из двух фигур: кругового сектора $OADB$ и треугольника AOB , причем вторую площадь надо считать отрицательной.

Площадь кругового сектора

$$F_1 = \frac{\pi r^2}{360} \cdot 60 = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{3,14 \cdot 30^2}{6} =$$

$$= 471 \text{ см}^2. \text{ Абсцисса его центра тяжести } x_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} =$$

$$= \frac{2}{3} R \frac{\sin 30^\circ}{\pi/6} = \frac{4 \cdot 30 \cdot 0,5}{3,14} \approx 19,1 \text{ см}. \text{ Площадь треугольника } F_2 =$$

$$= \frac{AB \cdot OE}{2} = AE \cdot OE = R \sin \alpha \cdot R \cos \alpha = \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2} = \frac{30^2 \cdot 0,866}{2} \approx$$

$$\approx 390 \text{ см}^2. \text{ Абсцисса его центра тяжести } x_2 = \frac{2}{3} OE = \frac{2}{3} R \cos \alpha =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 30 \cdot 0,866 \approx 17,3 \text{ см}.$$

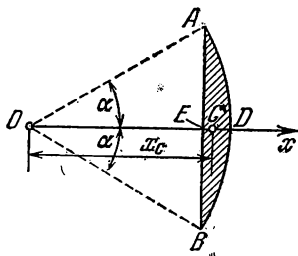


Рис. 126.

По формуле (50) определяем абсциссу центра тяжести данного кругового сегмента

$$x_C = \frac{\sum F_k x_k}{F} = \frac{F_1 x_1 + (-F_2 x_2)}{F_1 + (-F_2)} = \frac{471 \cdot 19,1 - 390 \cdot 17,3}{471 - 390} \approx 27,8 \text{ см.}$$

Задача 53. Тело (рис. 127) состоит из деревянного цилиндра, радиус основания которого $r = 5$ см, а высота $l = 30$ см, и двух скрепленных с ним стальных шаров с радиусами $R_1 = 12$ см и $R_2 = 9$ см. Определить положение центра тяжести этого тела, если удельный вес дерева $\gamma_1 = 0,6$ и удельный вес стали $\gamma_2 = 7,85$.

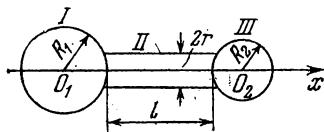


Рис. 127.

Решение. Искомый центр тяжести лежит на оси симметрии, проходящей через центры шаров O_1 и O_2 . Начало координат возь-

мем в центре O_1 большего шара и ось симметрии примем за ось x . Разобьем данное тело на три части и составим для них таблицу объемов и координат (абсцисс) центров тяжести.

Части тела	Объем v_k части (см ³)	Удельный вес γ_k	Абсцисса x_k центра тяжести части (см)
I	$\frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 2300\pi$	7,85	0
II	$\pi \cdot 5^2 \cdot 30 = 750\pi$	0,6	27
III	$\frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 972\pi$	7,85	51

Для определения абсциссы центра тяжести всего неоднородного тела воспользуемся формулой (48):

$$x_C = \frac{\sum G_k x_k}{G} = \frac{\sum \gamma_k v_k x_k}{\sum \gamma_k v_k} = \frac{7,85 \cdot 2300\pi \cdot 0 + 0,6 \cdot 750\pi \cdot 27 + 7,85 \cdot 972\pi \cdot 51}{7,85 \cdot 2300\pi + 0,6 \cdot 750\pi + 7,85 \cdot 972\pi} = 15,4 \text{ см.}$$

Задача 54. Определить статические моменты относительно координатных осей и положение центра тяжести сечения (рис. 128,а), составленного из равнобокого уголка $100 \times 100 \times 10$, швеллера № 24 и полосы 180×10 .

Решение. Из таблиц нормального сортамента для прокатной стали¹⁾ выпишем следующие данные:

¹⁾ Справочные таблицы по деталям машин, том I, изд-во «Машиностроение», 1965. В настоящее время на прокатную сталь действуют новые ГОСТы 1972 г.

I. Равнобокий уголок (рис. 128, б). ГОСТ 8509—57. Профиль № 10. Ширина полки $b = 100$ мм. Толщина полки $d = 10$ мм. Площадь поперечного сечения $F = 19,2$ см². Расстояние центра тяжести от оснований полки $z_0 = 2,83$ см.

II. Швеллер (рис. 128, в). ГОСТ 8240-56. Профиль № 24. Высота стенки $h = 240$ мм. Ширина полки $b = 90$ мм. Толщина стенки $d = 5,6$ мм. Площадь поперечного сечения $F = 30,6$ см². Расстояние центра тяжести от наружного края вертикальной стенки $z_0 = 2,42$ см. (Швеллер имеет горизонтальную ось симметрии, и, следовательно, его центр тяжести лежит на этой оси.)

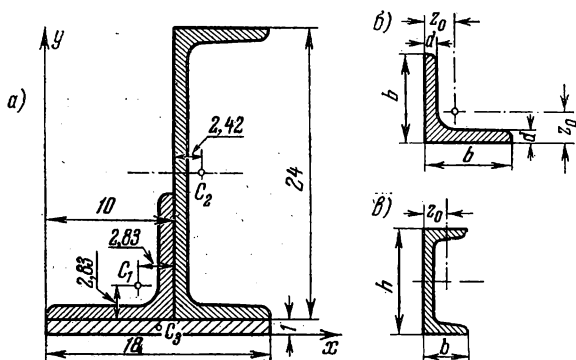


Рис. 128.

III. Полосовая сталь. ГОСТ 103-57. Сечение — прямоугольник. Ширина полосы 180 мм. Толщина 10 мм. Площадь поперечного сечения $F = 18$ см².

Нумеруем отдельные части сечения на основании записанных выше данных, проставляем соответствующие размеры (в см) на рис. 128, а. Оси координат выбираем так, как указано на этом рисунке.

Части сечения	Площадь каждой части (см ²)	Координаты центра тяжести каждой части (см)	
		x_k	y_k
I	19,2	$10 - 2,83 = 7,17$	$1 + 2,83 = 3,83$
II	30,6	$10 + 2,42 = 12,42$	$1 + 12 = 13$
III	18	9	0,5

Статический момент сечения относительно оси y :

$$S_y = \sum F_k x_k = 19,2 \cdot 7,17 + 30,6 \cdot 12,42 + 18 \cdot 9 = 679,6 \text{ см}^3.$$

Статический момент сечения относительно оси x :

$$S_x = \sum F_k y_k = 19,2 \cdot 3,83 + 30,6 \cdot 13 + 18 \cdot 0,5 = 462,3 \text{ см}^3.$$

Координаты центра тяжести сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{679,6}{19,2 + 30,6 + 18} = \frac{679,6}{67,8} \approx 10,0 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{462,3}{67,8} \approx 6,8 \text{ см}.$$

2. Экспериментальный способ

Одним из возможных экспериментальных способов определения положения центра тяжести тела является метод взвешивания. Пусть, например, требуется определить положение центра тяжести шатуна.

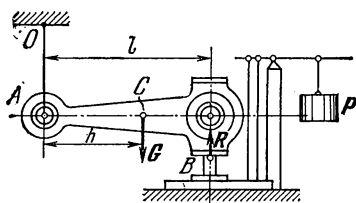


Рис. 129.

Подвесим шатун в точке A тросом к неподвижной точке O и обопрем его в точке B на платформу десятичных весов (рис. 129) так, чтобы шатун занял горизонтальное положение. Пусть при этом сила давления шатуна на платформу (а следовательно, и реакция R платформы, приложенная к шатуну), найденная путем взвешивания, оказалась по модулю равной P .

Зная вес G шатуна, расстояние l между точками A и B , теперь легко найти и расстояние h от точки A до центра C тяжести шатуна.

Согласно уравнению равновесия

$$\sum m_A(P_k) = Gh - Rl = 0, \text{ откуда } h = \frac{Rl}{G} = \frac{Pl}{G}.$$

ГЛАВА IX

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

§ 51. Понятие устойчивости равновесия тела, имеющего точку опоры или ось вращения

На находящееся в равновесии тело в реальных условиях действуют всякого рода кратковременные толчки, или, как говорят, «возмущения». Они могут сообщить телу малые отклонения от положения равновесия, нарушающие условия равновесия приложенных к телу сил.

Равновесие тела называется устойчивым, если после полученного им любого малого отклонения от положения равновесия приложенные к телу силы стремятся возвратить его в первоначальное положение.

И наоборот, равновесие тела называется неустойчивым, если в результате полученного им какого-либо малого отклонения от первоначального положения равновесия тело уже не возвращается к этому положению.

Примером устойчивого равновесия может служить равновесие шарика, касающегося вогнутой поверхности в ее нижней точке (рис. 130, *а*), примером неустойчивого равновесия — равновесие шарика, касающегося выпуклой поверхности в ее верхней точке (рис. 130, *б*).

Если поверхность, на которой лежит шарик, гладкая и, следовательно, трением между шариком и поверхностью можно пренебречь, то реакция поверхности будет направлена по нормали к поверхности в соответствующей точке.

В обоих случаях шарик будет находиться в равновесии, так как приложенные к ним силы \mathbf{G} и \mathbf{R} равны по модулю и противоположны по направлению. Но равновесие шарика в случае, изображенном на рис. 130, *а*, есть устойчивое равновесие, тогда как в случае,

изображенном на рис. 130, б, это равновесие будет неустойчивым. В самом деле, если мы отклоним шарики от положения равновесия, то силы G и R будут направлены уже не по одной прямой, и их равнодействующая, теперь не равная нулю, будет стремиться возвратить шарик в первоначальное положение в первом случае и еще более удалить шарик от этого положения во втором случае.

Если шарик находится на горизонтальной плоскости (рис. 130, в), то приложенные к нему силы G и R

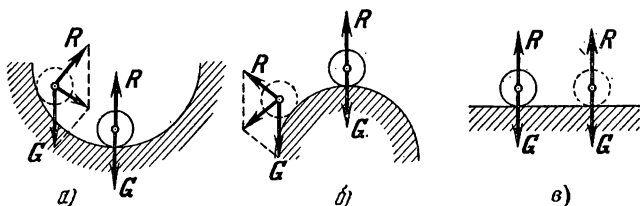


Рис. 130.

остаются уравновешенными при любом смещении шарика. Такое *равновесие, которое сохраняется при малом отклонении тела от первоначального положения, называется безразличным.*

Аналогичная зависимость между положением центра тяжести тела и видом его равновесия существует и для тела, имеющего неподвижную горизонтальную ось вращения.

Если центр тяжести тела при отклонении его от положения равновесия поднимается (рис. 131), то сила G тяжести тела дает относительно неподвижной оси, проходящей через точку O , момент, численно равный Gh и направленный так, чтобы возвращать тело в прежнее положение равновесия.

Наоборот, если положение оси вращения относительно центра тяжести тела таково, что при отклонении тела от положения равновесия его центр тяжести опускается (рис. 132), то сила G тяжести тела будет давать относительно оси вращения момент, численно равный Gh и направленный так, чтобы удалять тело от первоначального положения равновесия.

Наконец, если при любом отклонении тела положение его центра тяжести будет оставаться неизменным

(что будет в случае, когда центр тяжести тела лежит на оси вращения тела), то сила тяжести тела не будет давать при этих отклонениях никакого момента относительно оси вращения.

Из всего сказанного можно сделать следующий вывод: *равновесие тела, имеющего точку опоры или горизонтальную ось вращения, будет устойчивым, когда его*

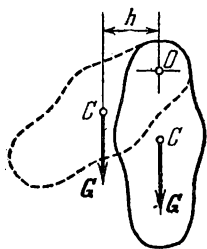


Рис. 131.

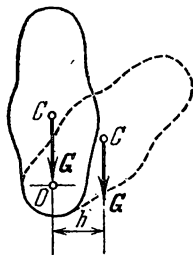


Рис. 132.

центр тяжести занимает самое низкое из всех возможных для него соседних положений, неустойчивым, когда он занимает самое высокое из этих положений, и безразличным, когда высота его центра тяжести при всех положениях тела остается неизменной.

§ 52. Устойчивость тела, опирающегося на плоскость

Представим себе какое-нибудь тело, опирающееся своим основанием на горизонтальную плоскость (рис. 133, а). Повернем это тело вокруг его ребра *A* в положение *II* так, чтобы линия силы *G* тяжести тела оставалась по ту же сторону от ребра *A*. Ясно, что в этом положении сила тяжести *G* дает относительно оси поворота момент, стремящийся возвратить тело в прежнее положение равновесия. Если повернем тело до положения *III*, т. е. так, чтобы линия силы *G* как раз пересекала ось опоры, то относительно нее момент силы тяжести будет равен нулю и тело с одинаковой вероятностью может как возвратиться в первоначальное положение, так и упасть на правую грань. Это будет положение неустойчивого равновесия, так как стоит только малейшей силе отклонить тело от этого положения, как его равновесие будет нарушено.

В противоположность этому положение *I* тела будет положением устойчивого равновесия, так как при малом отклонении от него тело опять возвращается в первоначальное положение.

Угол поворота тела из устойчивого положения в неустойчивое называется углом устойчивости. Этот угол

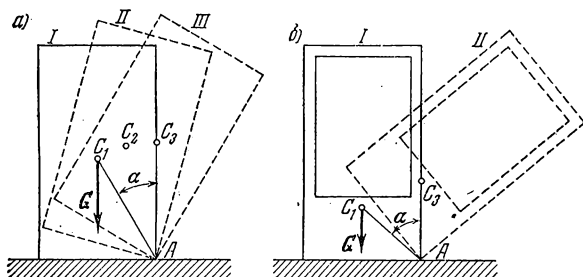


Рис. 133.

α тем больше, чем шире основание тела и чем ниже расположен его центр тяжести. Так, если мы, не изменяя положения *I* тела, изображенного на рис. 133, искусственно понизим его центр тяжести (сделав, например, его нижнюю часть более тяжелой, чем верхнюю), то угол устойчивости α увеличится. Для опрокидывания тела в этом случае (рис. 133, б) потребуется поворот его на большой угол.

Способность тела возвращаться к первоначальному положению равновесия по прекращении действия на тело сил, нарушающих это равновесие, называется динамической устойчивостью тела.

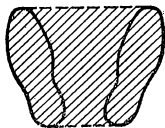


Рис. 134.

Из предыдущего следует, что динамическая устойчивость тела увеличивается с увеличением ширины опорной площади тела и с понижением его центра тяжести.

Если тело опирается не сплошной подошвой, а несколькими точками, не лежащими на одной прямой, то за опорную площадь надо принимать площадь, образуемую линиями, соединяющими эти точки. Так, для человека ею служит площадь, заштрихованная на рис. 134.

Для увеличения динамической устойчивости, например, колеса повозки раздвигают возможно шире, а груз на них распределяют таким образом: тяжелые предметы кладут вниз, а легкие вверх. С этой же целью часто делают массивными основания предметов, благодаря чему понижается их центр тяжести.

На практике часто приходится заботиться не только о динамической устойчивости тел (как, например, для различного рода экипажей, речных и морских судов и пр.), т. е. не только о том, чтобы они возвращались в первоначальное положение равновесия после малых отклонений от него, но и о том, чтобы равновесие их не нарушалось вовсе.

Способность тела сопротивляться всякому, хотя бы и малому, нарушению его равновесия называется статической устойчивостью тела.

Предположим, что на тело, вес которого G , действует некоторая сила P , стремящаяся опрокинуть тело вокруг ребра B (на рис. 135 изображено сечение $ABCD$ этого тела вертикальной плоскостью, проходящей через центр его тяжести и линию действия силы P). Равновесие тела будет возможно лишь в том случае, если линия действия равнодействующей

R_P сил G и P , действующих на тело, будет проходить слева от точки B (рис. 135, а), т. е. если она будет пересекать плоскость опоры внутри контура основания тела. Если же линия действия равнодействующей R_P сил G и P (рис. 135, б) пройдет справа от точки B , т. е. вне опорного контура, то эта равнодействующая будет давать момент, стремящийся отделить основание тела от опорной плоскости и опрокинуть его вокруг точки B . В предельном случае равновесия, когда линия действия равнодействующей R_P сил G и P пройдет через точку B , ее момент относительно этой точки будет равен нулю. Но по теореме Вариньона момент равнодействующей R_P равен сумме моментов составляющих сил. Следовательно, в предельном

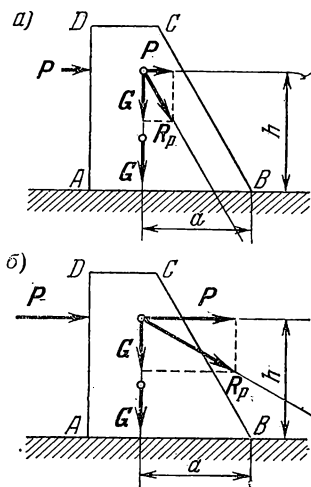


Рис. 135.

случае равновесия тела $\sum m_B(P_k) = Ga - Ph = 0$, или $Ga = Ph$. Произведение Ga , т. е. произведение веса тела на его плечо относительно возможной оси вращения тела, называется моментом устойчивости тела.

Произведение Ph , т. е. произведение модуля опрокидывающей силы на ее плечо относительно возможной оси вращения тела, называется опрокидывающим моментом.

Если $Ga < Ph$, то тело опрокидывается; если же $Ga > Ph$, то тело остается в равновесии. Следовательно, для статической устойчивости тела необходимо, чтобы момент устойчивости тела был больше опрокидывающего момента. Отношение момента устойчивости к опрокидывающему моменту называется коэффициентом устойчивости

$$k = \frac{Ga}{Ph}. \quad (56)$$

Этот коэффициент в целях устойчивости сооружения всегда должен быть больше единицы. Значения его для различных сооружений даются ГОСТом. Обычно k заключается в пределах от 1,5 до 2.

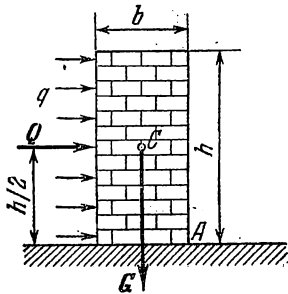


Рис. 136.

Задача 55. Определить коэффициент устойчивости кирпичного столба (рис. 136), если ширина его $a = 1$ м, толщина $b = 0,7$ м, высота $h = 4$ м, давление ветра $q = 1$ кПа $= 1$ кН/м² нормально к поверхности столба. Удельный вес кладки $\gamma = 24$ кН/м³.

Решение. Положим, что ветер дует слева. Площадь, подверженная давлению, $F = ah = 1 \cdot 4 = 4$ м². Линия действия равнодействующей давления

ветра будет проходить через центр тяжести C столба и равна по модулю $Q = qF = 1 \cdot 4 = 4$ кН.

Эта сила стремится опрокинуть столб вправо, вращая его вокруг ребра A . Опрокидывающий момент этой силы относительно ребра A равен

$$m_A(Q) = Q \frac{h}{2} = 4 \cdot \frac{4}{2} = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Вес столба

$$G = abh\gamma = 1 \cdot 0,7 \cdot 4 \cdot 24 = 67,2 \text{ кН}.$$

Момент устойчивости столба относительно ребра A

$$m_A(G) = G \frac{b}{2} = 67,2 \cdot \frac{0,7}{2} \approx 23,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Коэффициент устойчивости столба $k = \frac{m_A(G)}{m_A(Q)} = \frac{23,5}{8} \approx 2,94$.

Задача 56. Подъемный кран установлен на каменном фундаменте (рис. 137). Вес крана $G_1 = 40$ кН и приложен в его центре C тяжести на расстоянии $b = 0,75$ м от оси крана. Вылет крана $l = 4$ м. Фундамент имеет квадратное основание, сторона которого $a = 2$ м; удельный вес материала фундамента $\gamma = 20$ кН/м³. Вычислить необходимую высоту h фундамента, если грузоподъемность крана $P = 25$ кН, а коэффициент устойчивости его k должен равняться 2.

Решение. Сила P стремится опрокинуть кран (вместе с фундаментом) вокруг ребра A . Ее опрокидывающий момент относительно этого ребра

$$m_A(P) = P \left(l - \frac{a}{2} \right).$$

Момент устойчивости крана равен сумме моментов относительно ребра A двух сил: силы G_1 тяжести крана и силы G_2 тяжести кладки:

$$\sum m_A(G) = G_1 \left(\frac{a}{2} - b \right) + G_2 \frac{a}{2},$$

где вес кладки фундамента $G_2 = a^2 h \gamma$.

При заданном коэффициенте устойчивости $k = 2$ момент устойчивости крана должен быть равным

$$\sum m_A(G) = k m_A(P).$$

Отсюда

$$G_1 \left(\frac{a}{2} - b \right) + a^2 h \gamma \frac{a}{2} = k P \left(l - \frac{a}{2} \right).$$

Решая последнее уравнение, находим

$$h = \frac{2kP \left(l - \frac{a}{2} \right) - 2G_1 \left(\frac{a}{2} - b \right)}{a^3 \gamma} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 25 (4 - 1) - 2 \cdot 40 (1 - 0,75)}{2^3 \cdot 2} = 1,75 \text{ м}.$$

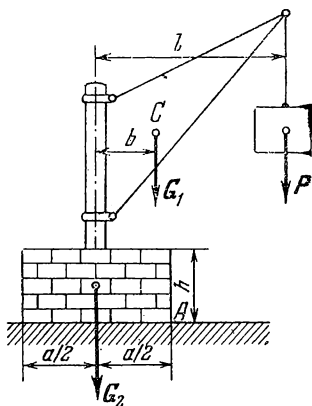


Рис. 137.

РАЗДЕЛ II

КИНЕМАТИКА

ГЛАВА X

ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ

§ 53. Предмет и основные понятия кинематики

Кинематикой называется раздел теоретической механики, изучающий движение тел лишь с геометрической стороны, вне зависимости от факторов, обуславливающих тот или иной характер этого движения.

Подобно геометрии, которая, изучая пространственные свойства тел, оставляет в стороне все остальные их материальные признаки (вес, твердость и т. д.), кинематика, рассматривая движение тел как происходящий во времени процесс непрерывного изменения их положения в пространстве, также оставляет в стороне вопрос о связи этого движения с материальной структурой тел и силами, на них действующими. Движущееся тело, следовательно, рассматривается в кинематике лишь как некоторый геометрический образ.

Кинематика целиком основывается на аксиомах и положениях геометрии, но отличается от нее тем, что кроме пространства, проходимого движущимся телом, она рассматривает еще и время, за которое совершается движение.

Кинематика имеет весьма важное значение не только для изучения последнего раздела теоретической механики — динамики, но и для исследования геометрических свойств движения частей различного рода механизмов. Прогресс техники, задачи конструирования сложных механизмов и машин привели в первой половине XIX века к выделению кинематики в самостоятельный раздел теоретической механики. Дальнейшее развитие кинематики также идет в настоящее время глав-

ным образом по пути ее приложения к конструированию и исследованию механизмов и машин.

Пространство и время, входящие в понятие движения, представляют собой формы существования материи, без которых не мыслимы ни сама материя, ни ее движение. «В мире нет ничего, кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени» (В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Соч., изд. 5, том 18, стр. 181).

Всякое механическое движение материального тела можно наблюдать и изучать лишь по отношению к какому-либо другим телам. Если бы в пространстве находилось только одно данное тело и не было бы других, то мы вообще были бы лишены возможности судить об изменении положения данного тела и, следовательно, о его движении.

Система координат, связанная с телом, относительно которого рассматривается изучаемое движение, называется системой отсчета.

Движение одного и того же тела относительно разных систем отсчета может быть совершенно различным. Так, для наблюдателя, находящегося на палубе парохода, какой-нибудь лежащий на ней предмет неподвижен, в то время как для наблюдателя, находящегося на берегу, он движется. Камень, брошенный вертикально вверх на палубе равномерно движущегося парохода, падает на то же место и движется, следовательно, по отношению к палубе по прямой. Для наблюдателя же, стоящего на берегу, он движется по кривой (параболе). Если какое-либо тело находится в покое по отношению к Земле, то оно же движется по отношению к Солнцу, и т. д. Абсолютно неподвижных тел в природе не существует, и потому принципиально невозможно установить какую-либо абсолютно неподвижную систему отсчета.

Таким образом, понятия «движение» и «покой» являются относительными понятиями и имеют смысл только при указании системы отсчета, относительно которой они рассматриваются. Если тело изменяет свое положение относительно выбранной системы отсчета, то про такое тело говорят, что оно движется относительно этой системы отсчета; если же его положение относительно системы отсчета не изменяется с течением времени, то про такое тело говорят, что оно находится в покое

по отношению к данной системе отсчета. В технической практике за основную, или «неподвижную», систему отсчета обычно берется система отсчета, неподвижная относительно Земли, и движение тел по отношению к этой системе отсчета принимается (условно) за абсолютное. Нужно заметить, что для целей кинематики, рассматривающей движение тел вне зависимости от сил, на них действующих, по существу неважно, движется ли в действительности или нет система, принятая за «неподвижную».

Движение тела считается известным тогда, когда мы имеем возможность определить его положение относительно выбранной системы отсчета в каждый момент времени.

Время является скалярной непрерывно изменяющейся величиной и рассматривается в задачах кинематики как независимая переменная величина (аргумент). Все другие величины, изменяющиеся с течением времени, рассматриваются как функции времени.

Подобно тому как положение точки на прямой определяется расстоянием ее от некоторой другой точки, так и *данный момент времени t* (данное мгновение) определяется промежутком времени, протекающим от некоторого другого момента, условно принятого в данной задаче за *начальный момент времени*, т. е. за начало отсчета времени. Для начального момента времени можно принять, следовательно, значение переменной t равным нулю. Тогда моменты времени t_1 и t_2 будут определяться соответственно промежутками времени t_1 и t_2 , отделяющими их от начального момента времени, а *промежуток времени* между моментами времени t_1 и t_2 — разностью $t_2 - t_1$.

Различные точки тела могут совершать, вообще говоря, различные движения. Поэтому изучение движения обычно начинается с так называемой кинематики точки, т. е. с установления кинематических характеристик движения отдельной материальной точки. Такой подход к изучению кинематики не является оторванной от практики абстракцией. Движение всякого тела складывается из движений отдельных его точек. Умея определять движение отдельной точки, мы сумеем определить и движение всего тела. Кроме того, как мы увидим в дальнейшем, для суждения о движении тела в целом в ряде случаев достаточно знать движение только одной его точки.

В процессе своего движения точка последовательно занимает различные положения относительно принятой системы отсчета, причем эти положения непрерывно следуют одно за другим.

Линия, описываемая движущейся точкой в пространстве, называется траекторией этой точки.

Движение точки называется *прямолинейным*, если ее траектория — прямая линия, и *криволинейным*, если ее траектория — кривая линия. В зависимости от формы кривой криволинейное движение в свою очередь может быть различным: круговым (когда траектория точки — окружность или ее дуга), эллиптическим (когда траектория точки — эллипс), винтовым (когда траектория точки — винтовая линия) и т. д.

Форма траектории зависит, конечно, от выбора системы отсчета. Это ясно хотя бы из приведенного выше примера с камнем, брошенным на палубе движущегося парохода. Всякая классификация движений носит относительный характер и имеет смысл только тогда, когда эти движения рассматриваются относительно одной и той же системы отсчета.

Если точка в равные, произвольно взятые, промежутки времени проходит пути одинаковой длины, то движение точки называется равномерным, в противном случае движение точки называется неравномерным или переменным.

Движение точки характеризуется признаками, устанавливаемыми каждой из двух данных выше классификаций. Как прямолинейное, так и криволинейное движение точки может одновременно быть или равномерным, или неравномерным (переменным) движением.

§ 54. Способы задания движения точки

1. Естественный способ

Положим, что точка совершает движение по некоторой траектории AB (рис. 138). Возьмем на этой траектории какую-либо произвольную (неподвижную) точку O и назовем ее началом отсчета расстояний. *Измеренная в линейных единицах длина дуги OM называется расстоянием точки M от начала отсчета или ее дуговой координатой.* Это расстояние мы будем обозначать строчной буквой s (в отличие от пути, пройденного

точкой, обозначаемого заглавной буквой S). Для определенности нужно условиться о направлении отсчета расстояния и считать расстояние s величиной алгебраической: положительной, если расстояние откладывается по траектории в одну какую-либо сторону от начала отсчета O , и отрицательной, если оно откладывается в противоположную сторону.

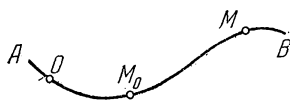


Рис. 138.

Выбор положительного направления отсчета, вообще говоря, произволен.

Заметим, что расстояние s точки от начала отсчета нельзя смешивать с длиной пути S , пройденного точкой за соответствующий промежуток времени.

Путь S , пройденный точкой за некоторый промежуток времени t , легко находится в том случае, когда точка движется по траектории в одну сторону (эта сторона принимается обычно в таких случаях за положительную сторону отсчета расстояний). Если при этом в начальный момент времени (в момент $t = 0$) точка находилась в начале отсчета, то, очевидно, путь S , пройденный точкой за промежуток времени t , равен ее расстоянию s от начала отсчета, т. е. в этом случае $S = s$. Если в момент времени $t = 0$ точка находилась не в начале O отсчета, а в некотором положении M_0 (рис. 138), определяемом расстоянием $s_0 = \overline{OM_0}$ от начала отсчета (это расстояние называется *начальным расстоянием*), то путь, пройденный точкой за промежуток времени t , будет $S = s - s_0$.

Но если направление движения точки по траектории изменяется, то ее расстояние s от начала отсчета будет с течением времени то увеличиваться, то уменьшаться, тогда как путь S , пройденный точкой, может только возрастать. Пусть, например, некоторая точка за промежуток времени от 0 до t переместилась по своей траектории из начала отсчета O в положение M (рис. 138) и обратно. Тогда в момент времени t расстояние точки от начала отсчета $s = 0$. Путь же, пройденный точкой за промежуток времени t , равен удвоенной дуге OM : $S = 2\overline{OM}$.

В каждый данный момент точка может занимать только одно определенное положение на траектории, и, следовательно, ее расстояние s от начала отсчета

есть некоторая однозначная функция времени t . Зависимость между переменными s и t может быть выражена в общепринятых математических символах уравнением

$$s = f(t). \quad (57)$$

Уравнение, выражающее функциональную зависимость между расстоянием s точки от начала отсчета и временем t ее движения, называется *уравнением движения точки по данной траектории или законом движения*.

Если закон движения точки по данной траектории установлен, т. е. если s является известной функцией t , то мы можем для любого момента времени определить расстояние точки от начала отсчета и тем самым определить ее положение на траектории.

Траектория точки может быть задана различными способами: или аналитически, т. е. в виде уравнения кривой, или геометрически. Представляющая собой закон движения точки по траектории функция $s = f(t)$ также может быть задана или аналитически, или в виде графика. График функции $s = f(t)$ называется *кривой расстояний или графиком движения*.

Этот график, дающий наглядное представление о характере движения точки, легко строится, если функция $s = f(t)$ известна. Давая моменту времени t различные числовые значения, подставляют их в выражение данной функции и вычисляют соответствующие значения расстояния s . Беря затем две взаимно перпендикулярные координатные оси (рис. 139), откладывают по оси абсцисс (называемой в этом случае *осью времени*) значения аргумента t , а по оси ординат (называемой в этом случае *осью расстояний*) соответствующие значения¹⁾ расстояний s . Соединяя точки, построенные по координатам t и s , непрерывной линией, получаем кривую, являющуюся графиком данной функции $s = f(t)$.

Важность графического построения зависимости $s = f(t)$ состоит в том, что она дает возможность найти

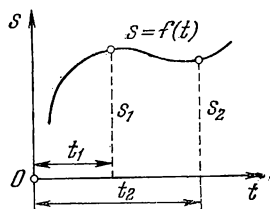


Рис. 139.

¹⁾ Масштабы для t и s могут выбираться произвольно и независимо друг от друга.

приближенное уравнение движения точки по данной траектории и в том случае, когда известны значения расстояний s лишь для отдельных моментов t , а аналитическая зависимость между s и t не известна. Иногда кривые расстояний вычерчиваются автоматически, при помощи участвующих в движении самопишущих приборов. Имея график движения, всегда можно найти расстояние s точки от начала отсчета и определить ее положение на траектории. Последняя, так же как и при аналитическом задании функции, должна быть, конечно, известна. Обращаем внимание на то, что кривую расстояний (график движения) никак нельзя отождествлять с траекторией движения точки. Так, например, для равномерного движения точки M по некоторой кривой, изображенной на рис. 138, траекторией точки будет данная кривая AB , а графиком движения (графиком функции $s = f(t)$) будет прямая линия (так как приращение расстояния s точки M от начала отсчета O будет прямо пропорционально приращению времени движения точки)¹⁾.

Рассмотренный способ определения положения точки называется естественным. Таким образом, *при естественном способе задания движения точки должны быть известны: а) траектория точки в выбранной системе отсчета, б) начало и положительная сторона отсчета, в) закон движения точки по данной траектории в виде уравнения $s = f(t)$ или графика.*

2. Координатный способ

Координатный способ задания движения точки основан на том, что положение точки относительно некоторой системы отсчета всегда может быть задано при помощи определенной совокупности чисел, называемых ее координатами.

Используются различные системы координат. Так, например, положение точки на поверхности Земли принято определять с помощью так называемых географических координат: широты и долготы.

¹⁾ На рис. 139 изображен график неравномерного движения точки. Ордината s этого графика то увеличивается, то уменьшается. Следовательно, точка M то удаляется от начала отсчета расстояний, то приближается к нему.

Наибольшее применение на практике имеет прямоугольная система координат, поэтому мы и остановимся только на способе задания движения точки именно в этой системе координат. Возьмем три взаимно перпендикулярные оси координат (рис. 140). Положение точки M относительно данной системы координат вполне определяется тремя координатами точки: x , y и z . При движении точки M ее координаты изменяются с течением времени, т. е. будут являться некоторыми функциями аргумента t :

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

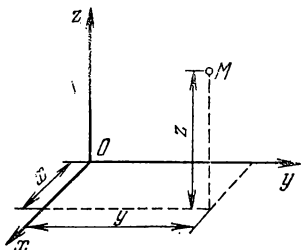


Рис. 140.

Если нам будет известно, как изменяются со временем координаты движущейся точки, т. е. если нам будут известны уравнения (58), то мы всегда сможем определить координаты этой точки для любого момента времени, а следовательно, определить и ее положение относительно данной системы отсчета.

Уравнения (58), выражающие функциональные зависимости между прямоугольными координатами (x, y, z) точки и временем t ее движения, называются *уравнениями движения точки в прямоугольных координатах*.

Если во все время движения точка остается в одной плоскости, то, выбрав систему двух взаимно перпендикулярных осей x и y в этой плоскости, получим возможность определять любое положение точки в данной плоскости только двумя ее координатами. При движении точки M (рис. 141) в одной плоскости ее координаты x и y , вполне определяющие положение этой точки, будут изменяться с течением времени, т. е. будут являться некоторыми функциями аргумента t . Следовательно, плоское движение точки определяется двумя уравнениями движения в прямоугольных координатах:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

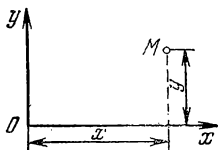


Рис. 141.

Если точка совершает прямолинейное движение, то можно принять прямую, по которой движется точка, за одну из координатных осей, например за ось x . Положение точки M на этой оси вполне определяется одной координатой $OM = x$ (рис. 142), и, следовательно, прямолинейное движение точки определяется одним уравнением

$$x = f(t). \quad (60)$$

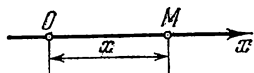


Рис. 142.

Если точка движется по прямой в одну сторону и в начальный момент находилась в начале координат O , то абсолютное значение координаты x будет являться в то же время и длиной пройденного точкой пути S .

Уравнения движения точки в прямоугольных координатах (58) и (59), определяя положение движущейся точки в любой момент времени, определяют тем самым и ее траекторию. Исключая время t из заданных уравнений движения точки, получаем уравнение ее траектории, т. е. уравнение, связывающее текущие координаты движущейся точки (в случае пространственного движения получим уравнения двух поверхностей, пересечение которых и определяет траекторию).

Траекторию точки можно найти и графически, построив по заданным уравнениям движения точки ряд ее последовательных положений и соединив их непрерывной линией.

Во многих практических задачах движение точки определяется геометрическими условиями, вытекающими из заданной конструкции механизма. По этим условиям и находятся, аналитически или графически, траектория и уравнения движения интересующей точки.

Установлением величин, определяющих в любой момент времени положение движущейся точки относительно выбранной системы отсчета, не исчерпывается, однако, задача кинематического исследования движения точки. Важнейшими характеристиками всякого движения точки являются его скорость и ускорение. Методы их определения мы установим в следующих главах. Сейчас же только заметим, что они могут быть найдены как при естественном, так и при координатном способе задания движения точки. Оба эти способа вполне определяют движение и позволяют найти все его характеристики.

Задача 57. Кривошип OA (рис. 143) равномерно вращается вокруг неподвижной оси O и приводит в движение ползун B при помощи шатуна AB , соединенного шарнирно с кривошипом и ползуном. Угол φ поворота кривошипа изменяется со временем по закону $\varphi = kt$. Определить в прямоугольных координатах уравнения движения средней точки M шатуна и найти траекторию этой точки. Длина кривошипа $OA = AB = l$. (Неподвижная направляющая ползуна расположена позади кривошипно-шатунного механизма.)

Решение. Проведем прямоугольные координатные оси x и y так, как показано на рис. 143. Треугольник OAB равнобедренный, следовательно, $\angle ABO = \angle AOB = \varphi$.

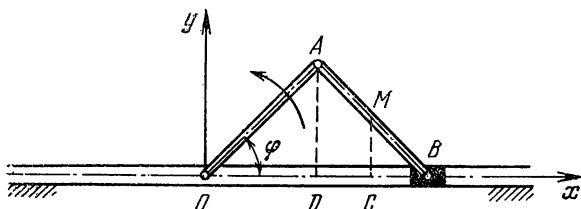


Рис. 143.

Координатами точки M в данной системе координат будут

$$x = OC = OD + DC = OA \cdot \cos \varphi + AM \cdot \cos \varphi = \frac{3}{2} OA \cdot \cos \varphi$$

и

$$y = MC = \frac{1}{2} AB \cdot \sin \varphi.$$

Подставляя в эти уравнения значения $OA = AB = l$ и $\varphi = kt$, получаем искомые уравнения движения средней точки M шатуна:

$$x = 1,5l \cos kt, \quad y = 0,5l \sin kt.$$

Чтобы найти траекторию точки M , исключим время t из ее уравнений движения. Для этого найдем из данных уравнений значения $\cos kt$ и $\sin kt$, возведем их в квадрат и сложим. Так как сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же аргумента равна единице, то будем иметь

$$\cos^2 kt + \sin^2 kt = \frac{x^2}{(1,5l)^2} + \frac{y^2}{(0,5l)^2} = 1.$$

Таким образом, траекторией средней точки M шатуна будет кривая, определяемая уравнением $\frac{x^2}{(1,5l)^2} + \frac{y^2}{(0,5l)^2} = 1$. Кривая эта, очевидно, есть эллипс с центром в неподвижной точке O и с полуосями $a = 1,5l$ и $b = 0,5l$.

Задача 58. Частица M грунта, сбрасываемого с ленты горизонтального транспортера, расположенного над поверхностью Земли на высоте $h = 122,5$ см, движется согласно уравнениям $x = 2t$, $y = 4,9t^2$. (В этих уравнениях t выражено в секундах, а x и y — в

метрах.) Начало системы координат (рис. 144), по отношению к которой выражено данными уравнениями движение точки M , взято в точке O сброса частицы; ось x горизонтальна, ось y направлена вертикально вниз. Найти уравнение траектории частицы M грунта, дальность l и время T ее падения.

Решение. Для определения траектории точки M исключаем из уравнений движения время t . Из первого уравнения находим $t = x/2$. Подставляя это значение t во второе уравнение, получаем уравнение траектории $y = 4,9t^2 = 4,9 \frac{x^2}{4} = 1,225 x^2$, т. е.

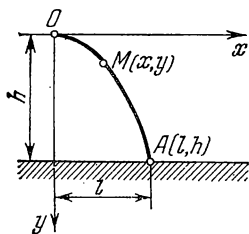


Рис. 144.

$y = 1,225x^2$. Искомой траекторией, очевидно, является парабола, симметричная относительно оси y и имеющая вершину в точке O . Найденному уравнению должны, конечно, удовлетворять координаты любой точки траектории падающей частицы грунта. Координатами точки A пересечения данной траектории с поверхностью Земли являются: h — высота точки O сброса частицы и l — дальность ее падения. Подставляя в уравнение траектории $y = h = 122,5$ см $= 1,225$ м и $x = l$, находим $1,225 = 1,225l^2$, откуда $l = 1$ м. Подставляя затем $x = l = 1$ м и $t = T$ в первое из данных уравнений движения точки (т. е. в уравнение $x = 2t$), находим и время падения частицы грунта: $1 = 2T$, откуда $T = 0,5$ с.

ГЛАВА XI

СКОРОСТЬ ТОЧКИ

§ 55. Понятие скорости точки

Скоростью точки называется вектор ¹⁾, определяющий в каждый данный момент быстроту и направление движения точки.

Наиболее просто определяется скорость точки для случая ее равномерного прямолинейного движения.

Постоянное для данного равномерного движения отношение пути S , пройденного точкой за некоторый промежуток времени, к величине t этого промежутка представляет собой модуль v скорости точки при ее равномерном движении,

$$v = \frac{S}{t}. \quad (61)$$

За направление вектора v скорости точки в случае ее прямолинейного движения принимается направление вдоль траектории, т. е. *вектор скорости направлен по прямолинейной траектории точки из данного положения точки в сторону ее движения.*

Из формулы (61) следует, что скорость имеет размерность ²⁾

$$[v] = \frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]}.$$

¹⁾ Подтверждением того обстоятельства, что скорость точки является векторной величиной, служит доказываемая в дальнейшем (§ 70) возможность геометрического сложения скоростей.

²⁾ Размерностью какой-либо величины называется выражение ее единицы измерения через основные единицы измерения. Чтобы показать, что речь идет о размерности данной величины, ее обозначение заключается в квадратные скобки.

Каждому выбору единиц длины и времени соответствует своя единица скорости. Скорость может выражаться в м/с, см/с, м/мин, км/ч и т. д.

Распространим теперь понятие скорости на случай любого криволинейного и неравномерного движения.

Пусть некоторая точка совершает движение по криволинейной траектории AB (рис. 145). Пусть в последовательные моменты времени t и $t + \Delta t^1$ она занимает соответственно положения M и M' . Соединим точки M и M' вектором.

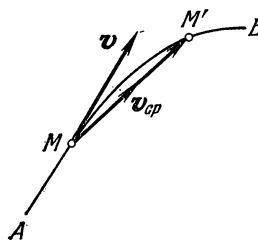


Рис. 145.

Вектор $\overrightarrow{MM'}$, соединяющий положение точки в начале промежутка времени Δt с ее положением в конце этого промежутка, называется вектором перемещения точки за это время.

Если представить себе, что точка M движется не по дуге $\overline{MM'}$ (как это происходит в действительности), а по ее хорде MM' , и притом движется равномерно, то скорость такого воображаемого движения называется *средним за промежуток времени Δt вектором скорости точки*,

$$v_{\text{ср}} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}. \quad (62)$$

Перемещение $\overrightarrow{MM'}$ точки есть вектор. Но от деления вектора на положительную величину Δt получается вектор того же направления, с модулем, равным модулю данного вектора, деленному на Δt .

Таким образом, *средний за промежуток времени Δt вектор скорости $v_{\text{ср}}$ точки имеет направление вектора $\overrightarrow{MM'}$ ее перемещения и по модулю равен частному от деления модуля MM' вектора перемещения точки на соответствующий промежуток времени.*

Очевидно, что средняя скорость точки позволяет судить только о направлении конечного перемещения точки за рассматриваемый промежуток времени и о некоторой средней быстроте этого перемещения, но не дает

¹⁾ Греческую букву Δ (дельта) надо понимать здесь не как множитель при t , а только как символ, указывающий на малое приращение времени t .

представления о действительной скорости движения точки в каждый момент времени.

При изменении промежутка времени Δt изменяется и перемещение точки $\overrightarrow{MM'}$. Средняя скорость точки, вообще говоря, есть величина непостоянная, зависящая от выбранной величины промежутка времени Δt . Но чем меньше мы будем брать промежуток Δt , тем с большей точностью можно будет заменить соответствующий малый участок траектории (дугу $\overline{MM'}$) хордой MM' , тем точнее средняя скорость точки за этот промежуток времени будет характеризовать быстроту и направление движения точки в момент времени t , т. е. в момент, когда точка занимает на траектории положение M .

По мере непрерывного уменьшения промежутка времени Δt непрерывно изменяются направление и модуль вектора $\overrightarrow{MM'}$ перемещения точки, но отношение $\overrightarrow{MM'}/\Delta t$ стремится к некоторому определенному пределу.

Отсюда следует, что *вектор \mathbf{v} скорости точки в данный момент равен пределу ее средней скорости за промежутки времени, начинающийся в данный момент, когда величина этого промежутка времени стремится к нулю:*

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}. \quad (63)$$

Так как вектор \mathbf{v}_{cp} направлен по вектору $\overrightarrow{MM'}$ перемещения точки, а в пределе, при неограниченном уменьшении Δt , секущая $\overrightarrow{MM'}$ совпадает с касательной в точке M , то *вектор \mathbf{v} скорости точки в каждый момент направлен по касательной к траектории в данной ее точке в сторону движения точки* (рис. 145).

Методы определения модуля скорости точки в данный момент зависят от способа задания движения точки и будут установлены в следующих параграфах.

§ 56. Определение скорости точки при естественном способе задания движения

При естественном способе задания движения точки должны быть известны ее траектория AB (рис. 146) и закон движения точки по этой траектории $s = f(t)$, где s — дуговая координата, т. е. расстояние точки от

начала отсчета. Положительное направление отсчета расстояний указано на рис. 146 знаком плюс.

Так как при данном способе задания движения точки нам известна траектория точки, то направление вектора v ее скорости нам также известно. Он направлен всегда, как было сказано выше, по касательной к траектории в данной ее точке в сторону движения точки (рис. 146).

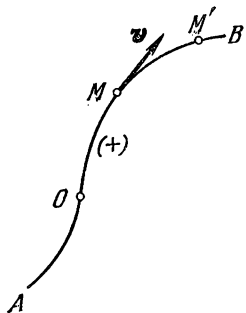


Рис. 146.

Остается определить модуль скорости точки.

Предположим, что в момент времени t точка находилась на траектории в положении M , а в момент $t + \Delta t$ (Δt — малый промежуток времени) — в положении M' . Расстояниями движущейся точки от начала отсчета будут в момент времени t длина дуги $OM = s = f(t)$ и в момент $t + \Delta t$ длина дуги $OM' = s' = f(t + \Delta t)$.

Обозначая длину дуги $\overline{MM'}$ траектории, пройденной точкой за промежуток времени Δt , через Δs , будем иметь $\Delta s = s' - s = f(t + \Delta t) - f(t)$, т. е. Δs равно приращению данной функции времени за промежуток времени Δt .

Численное значение скорости точки в данный момент времени t

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Как известно из математики, предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, называется производной данной функции. Соответственно принятым обозначениям производной можно записать:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Если, как мы и предположили первоначально, точка движется по траектории в сторону возрастающих расстояний s (в сторону положительной стороны отсчета расстояний), то приращение Δs расстояния точки от начала отсчета положительно. В таком случае производ-

ная ds/dt положительна и дает действительно модуль v скорости.

Если же точка движется в сторону убывающих расстояний s (в сторону отрицательного отсчета расстояний s), то приращение Δs отрицательно. В этом случае производная ds/dt отрицательна. Вообще, и в том и в другом случае производная ds/dt дает так называемое *численное* или *алгебраическое значение скорости*, которым определяется не только модуль скорости, но и направление движения по траектории.

В целях упрощения мы не будем в дальнейшем делать различия в обозначении модуля вектора и его численной величины. Нужно только помнить, что модуль любого вектора всегда положительная величина и равен абсолютному значению численной (алгебраической) величины вектора. Если же это обстоятельство важно иметь в виду, то мы будем обозначение модуля вектора брать в прямые скобки.

Если промежуток времени Δt , следующий за моментом времени t , взят настолько малым, что направление движения точки в течение этого промежутка можно считать неизменяющимся, то абсолютное значение приращения $|\Delta s|$ расстояния точки от начала O отсчета равно приращению ΔS пути, пройденного точкой за тот же промежуток времени Δt . Путь S , проходимый точкой, также, очевидно, есть некоторая функция времени. Приращение же ΔS пути, конечно, всегда положительно. Тогда

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Соединяя это равенство с предыдущим, будем иметь

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dS}{dt}. \quad (64)$$

Численная величина скорости в данный момент времени равна производной по времени от дуговой координаты s точки или от ее пути S .

Для вычисления модуля скорости точки по заданному уравнению ее движения $s = f(t)$ в какой-нибудь момент времени $t = T$ надо взять производную от функции s по времени t и затем уже в найденное выражение производной подставить вместо аргумента t его частное значение $t = T$, соответствующее тому моменту времени,

для которого определяется скорость. Абсолютная величина полученного результата и будет являться модулем искомой скорости точки в момент времени T .

Задача 59. Точка движется по заданной криволинейной траектории по закону $s = 5 \sin \pi t$ (t — в секундах, s — в сантиметрах). Найти модуль и направление скорости в момент $t = 3$ с.

Решение. При $t = 0$ $s = 5 \sin(\pi \cdot 0) = 0$. В начальный момент точка находится в начале отсчета расстояний. При $t = 3$ с $s = 5 \sin 3\pi = 5 \sin \pi = 0$, следовательно, точка возвращается в начало отсчета. Численное значение скорости точки $v = \frac{ds}{dt} = 5\pi \cos \pi t$ см/с. Подставляя в это выражение производной значение $t = 3$ с, будем иметь

$$v = 5\pi \cos 3\pi = 5\pi \cos \pi = 5\pi \cdot (-1) \approx -15,7 \text{ см/с.}$$

Отрицательное значение производной ds/dt при $t = 3$ с показывает, что в этот момент точка движется по траектории в сторону, противоположную той, которая принята за положительную при отсчете расстояний s . Таким образом, имеем: искомая скорость точки в момент $t = 3$ с равна 15,7 см/с и направлена по касательной к ее траектории в сторону, противоположную положительной стороне отсчета.

§ 57*. Определение скорости точки по уравнениям ее движения в прямоугольных координатах

Пусть точка движется в плоскости xOy согласно заданным уравнениям движения $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$. Отметим положения M и M' (рис. 147) движущейся точки в моменты t и $t + \Delta t$. Соответствующие координаты этих точек x , y и $x + \Delta x$, $y + \Delta y$. Соединив точки M и M' , получим вектор $\overrightarrow{MM'}$ перемещения точки за промежуток времени Δt . Вектор средней скорости точки за этот промежуток времени (формула (62)) будет

$$v_{\text{ср}} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}.$$

Из точки M проведем прямую MA параллельно оси x . Как видно из рис. 147, проекция вектора $\overrightarrow{MM'}$ на ось x

$$(\overrightarrow{MM'})_x = \Delta x.$$

Следовательно, проекция средней скорости точки на эту ось

$$v_{\text{ср } x} = \frac{(\overrightarrow{MM'})_x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и обозначая проекцию истинной скорости точки на ось x через v_x , получим

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср } x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Но координата x есть функция от времени t ; Δx — приращение этой функции, соответствующее приращению Δt аргумента t , а $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ есть производная этой функции. Следовательно,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f'_1(t). \quad (65a)$$

Рассуждая аналогично, найдем проекцию скорости точки на ось y :

$$v_y = \frac{dy}{dt} = f'_2(t). \quad (65b)$$

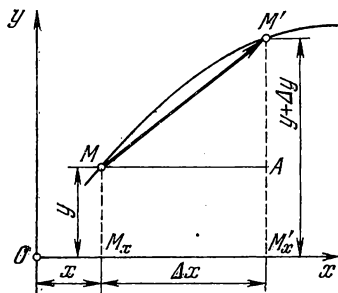


Рис. 147.

Проекции скорости точки на неподвижные координатные оси равны первым производным от соответствующих координат движущейся точки по времени.

При перемещении точки за время Δt по дуге траектории из положения M в положение M' проекция этой точки на ось x переходит из положения M_x в положение M'_x , перемещаясь на расстояние $M_x M'_x = \Delta x$. Очевидно, что расстояние Δx и производная $v_x = dx/dt$ будут положительными, если проекция точки на ось перемещается в положительном направлении оси (см. рис. 147), и отрицательными, если проекция точки на ось перемещается в противоположном направлении.

Таким образом, проекция скорости точки на координатную ось определяет модуль и направление скорости проекции этой точки на ту же ось.

Знание проекций вектора скорости точки на две неподвижные взаимно перпендикулярные оси, в плоскости которых лежит данный вектор, позволяет найти, так же как и для всякого вектора (§ 11), модуль вектора скорости и его направление:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \quad (66)$$

Направление вектора скорости определяется его направляющими косинусами:

$$\cos(\widehat{v, x}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\widehat{v, y}) = \frac{v_y}{v}. \quad (67)$$

Если точка совершает движение не в плоскости, а как угодно в пространстве, то для определения ее движения нужно знать еще и третье уравнение движения точки $z = f_3(t)$.

Аналогично предыдущему можно найти проекцию скорости точки на третью координатную ось $v_z = dz/dt$, а затем, по трем проекциям вектора v скорости на три взаимно перпендикулярные оси, его модуль и направляющие косинусы (подобно тому как определяются в § 39 модуль и направление вектора силы по его трем проекциям на координатные оси). Однако в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только случаев наиболее распространенного в технике плоского движения точки.

Задача 60. Движение снаряда задано уравнениями $x = 400\sqrt{2}t$ и $y = -5t^2 + 400\sqrt{2}t$ (x, y — в метрах, t — в секундах). Определить: 1) уравнение траектории, 2) высоту h и дальность l полета, 3) скорость v_1 в наивысшей точке траектории и скорость v_2 в момент падения снаряда на землю.

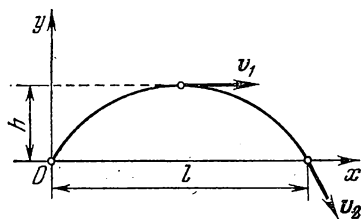


Рис. 148.

Решение. 1) Для определения траектории движения снаряда исключаем время из уравнений его движения:

$$t = \frac{x}{400\sqrt{2}}, \quad t^2 = \frac{x^2}{320\,000}, \quad y = -5t^2 + 400\sqrt{2}t = -5\frac{x^2}{320\,000} + x.$$

Траекторией снаряда служит парабола (рис. 148), определяемая уравнением

$$y = -\frac{x^2}{64\,000} + x.$$

2) Траектория снаряда пересекает ось x в двух точках, для которых ордината y равна нулю. Подставляя это значение y в уравнение траектории, находим абсциссы точек пересечения:

$$0 = x - \frac{x^2}{64\,000},$$

откуда

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 64\,000 \text{ м.}$$

Ясно, что дальность полета снаряда $l = x_2 = 64$ км. Для определения высоты $h = y_{\max}$ подъема траектории можно было бы воспользоваться общим приемом определения максимума функции $y = f(x)$, но ввиду симметричности кривой искомую высоту легко найти, подставив в уравнение траектории:

$$x = \frac{l}{2} = 32\,000 \text{ м} \quad \text{и} \quad y = h;$$

$$h = 32\,000 - \frac{32\,000^2}{64\,000} = 16\,000 \text{ м} = 16 \text{ км.}$$

3) Проекция скорости снаряда на координатные оси определяются по формулам (65):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (400\sqrt{2}t)' = 400\sqrt{2} \text{ м/с,}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (-5t^2 + 400\sqrt{2}t)' = -10t + 400\sqrt{2} \text{ м/с.}$$

Как видим, проекция скорости снаряда на ось x постоянна, проекция же скорости на ось y зависит от времени движения снаряда.

В наивысшей точке траектории вектор v_1 скорости снаряда, направленный по касательной к ней в этой точке, параллелен оси x . Следовательно,

$$v_{1y} = 0, \quad v_1 = v_{1x} = 400\sqrt{2} \text{ м/с.}$$

Для определения скорости v_2 снаряда в момент t_2 падения его на землю необходимо найти время полета снаряда. Для этого подставим в уравнение движения $x = 400\sqrt{2}t$ значения $x = l = 64\,000$ м и $t = t_2$. Будем иметь $64\,000 = 400\sqrt{2}t_2$ и

$$t_2 = \frac{64\,000}{400\sqrt{2}} = 80\sqrt{2} \text{ с.}$$

Подставив найденное значение времени t_2 полета снаряда в выражения для проекций скорости снаряда, находим

$$v_{2x} = 400\sqrt{2} \text{ м/с,}$$

$$v_{2y} = (-10t_2 + 400\sqrt{2}) = -10 \cdot 80\sqrt{2} + 400\sqrt{2} = -400\sqrt{2} \text{ м/с.}$$

Отсюда модуль v_2 искомой скорости

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{(400\sqrt{2})^2 + (-400\sqrt{2})^2} = 800 \text{ м/с.}$$

Направление вектора этой скорости определяется из формул

$$\cos(\widehat{v_2, x}) = \frac{v_{2x}}{v_2} = \frac{400\sqrt{2}}{800} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos(\widehat{v_2, y}) = \frac{v_{2y}}{v_2} = -\frac{400\sqrt{2}}{800} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда находим углы:

$$(\widehat{v_2, x}) = 45^\circ, \quad (\widehat{v_2, y}) = 135^\circ.$$

ГЛАВА XII

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

§ 58. Понятие ускорения точки

Движение точки с неизменной по модулю и направлению скоростью (равномерное прямолинейное движение) встречается на практике сравнительно редко, лишь в тех случаях, когда приложенные в точке силы взаимно уравновешиваются. В подавляющем большинстве случаев скорость точки при движении изменяется. Изменение это может происходить или только по модулю (неравномерное прямолинейное движение), или только по направлению (равномерное криволинейное движение), или и по модулю и по направлению (в общем случае неравномерного криволинейного движения). Для того чтобы установить в динамике зависимость между изменением движения тела и причиной этого изменения — силами, действующими на тело, нужно как-то охарактеризовать изменение движения и установить меру этого изменения.

Величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости как по модулю, так и по направлению, называется ускорением.

Пусть точка, движущаяся по некоторой криволинейной траектории (рис. 149), занимает на ней в момент времени t положение M и в момент $t + \Delta t$ положение M' . Векторы v и v' скорости точки в ее положениях M и M' будут направлены по соответствующим касательным.

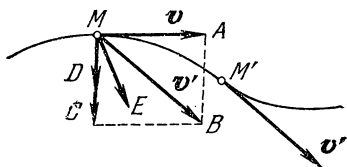


Рис. 149.

Определим изменение вектора скорости точки¹⁾ за промежуток времени Δt , т. е. при переходе точки из положения M в положение M' . Перенесем для этого начало вектора \mathbf{v}' в точку M , соединим концы A и B векторов \mathbf{v} и \mathbf{v}' и дополним полученный треугольник MAB до параллелограмма $MABC$. Являющийся диагональю данного параллелограмма вектор $\overrightarrow{MB} = \mathbf{v}'$ есть геометрическая сумма векторов $\overrightarrow{MA} = \mathbf{v}$ и \overrightarrow{MC} , а потому вектор \overrightarrow{MC} является геометрической разностью²⁾ векторов \mathbf{v}' и \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \overrightarrow{MC}, \text{ откуда } \overrightarrow{MC} = \mathbf{v}' - \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}.$$

Геометрически прибавляя к вектору \mathbf{v} скорости точки в момент времени t приращение $\Delta \mathbf{v}$ этого вектора за промежуток времени Δt , получим вектор \mathbf{v}' скорости точки в момент $t + \Delta t$. Вектор $\Delta \mathbf{v}$, представляющий собой геометрическую разность векторов скорости точки в конце и начале данного промежутка времени, называется приращением скорости точки (векторным или геометрическим) за соответствующий промежуток времени.

Вектор $\Delta \mathbf{v}$ вполне определяет и по модулю, и по направлению происшедшее за время Δt изменение скорости движущейся точки, поэтому отношение этого вектора к данному промежутку времени представляет собой среднее ускорение точки за соответствующий промежуток времени.

Обозначим вектор среднего ускорения точки символом $\mathbf{a}_{\text{ср}}$; будем иметь

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (68)$$

¹⁾ В криволинейном движении точки векторы \mathbf{v} и \mathbf{v}' ее скорости всегда различны. При равномерном криволинейном движении векторы \mathbf{v} и \mathbf{v}' имеют одинаковые модули, но различаются по направлению. В случае же неравномерного криволинейного движения точки векторы \mathbf{v} и \mathbf{v}' различаются и по модулю, и по направлению.

²⁾ Геометрической разностью двух векторов называется такой третий вектор, который, будучи геометрически сложен с вычитаемым вектором, дает вектор «уменьшаемый».

Нужно заметить, что термин «уменьшаемый» вектор применяется лишь по аналогии с арифметикой, ибо понятия «больше» и «меньше» к векторам неприменимы, а применимы только к их модулям. Но и модуль геометрической разности векторов может быть больше модуля «уменьшаемого» вектора.

Разделив вектор $\Delta \mathbf{v} = \overrightarrow{MC}$ на скалярную величину Δt , получим вектор \overrightarrow{MD} того же направления, что и вектор $\Delta \mathbf{v}$, но с модулем $|\Delta \mathbf{v} / \Delta t|$. Если $\Delta t < 1$, то модуль вектора \overrightarrow{MD} больше модуля вектора \overrightarrow{MC} . Но модули векторов $\Delta \mathbf{v} = \overrightarrow{MC}$ и $\mathbf{a}_{\text{ср}} = \overrightarrow{MD}$ имеют разную размерность и независимые масштабы.

Таким образом, *средним за данный промежуток времени ускорением точки называется вектор, равный отношению вектора приращения скорости точки за соответствующий промежуток времени к величине этого промежутка.*

Зная среднее ускорение $\mathbf{a}_{\text{ср}}$ точки за некоторый конечный промежуток времени Δt , всегда легко найти и приращение $\Delta \mathbf{v}$ вектора скорости точки, характеризующее изменение за этот промежуток времени модуля и направления скорости. Действительно, если вектор $\mathbf{a}_{\text{ср}} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t = \overrightarrow{MD}$ известен, то, умножив его на соответствующий ему промежуток времени Δt , получим вектор $\Delta \mathbf{v} = \overrightarrow{MC}$.

Среднее ускорение точки позволяет, однако, судить только о конечном изменении вектора скорости точки за рассматриваемый промежуток времени и не дает представления о действительном изменении величины и направления скорости точки в каждый данный момент. Каждому новому промежутку времени Δt соответствует свое положение точки M' на траектории и, вообще говоря, свое направление и своя величина вектора \mathbf{v}' скорости точки. Изменению вектора \mathbf{v}' будет соответствовать изменение и вектора $\Delta \mathbf{v}$ приращения скорости за рассматриваемый промежуток времени.

Таким образом, среднее ускорение $\mathbf{a}_{\text{ср}}$ точки за какой-либо промежуток времени зависит от величины этого промежутка. Если, выбрав какой-либо промежуток времени Δt , мы будем затем его уменьшать, то среднее ускорение точки $\mathbf{a}_{\text{ср}} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$ будет изменяться как по величине, так и по направлению. Однако по мере приближения Δt к нулю вектор среднего ускорения точки стремится к некоторому определенному пределу. Этот предел называется истинным ускорением точки в данный момент времени или, чаще, просто ускорением точки.

Обозначая ускорение точки в данный момент символом a , будем иметь

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (69)$$

Ускорение a точки в данный момент времени t равно пределу ее среднего ускорения за промежуток времени Δt , начинающийся в данный момент t , когда величина этого промежутка времени стремится к нулю.

Вектор a ускорения точки в данный момент времени есть предельное значение вектора среднего ускорения $a_{\text{ср}} = \Delta v / \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, и направление его, вообще говоря, не совпадает¹⁾ с направлением векторов $a_{\text{ср}}$ и Δv .

Нужно заметить, что во всех случаях (за исключением прямолинейного движения) модуль вектора Δv приращения скорости точки не равен приращению Δv модуля скорости. Так например, при равномерном движении точки по окружности скорость точки по модулю постоянна, но по направлению все время изменяется (рис. 150). В данном случае модули v и v' скорости точки в моменты t и $t + \Delta t$ равны между собой: $v = v'$ и $\Delta v = v' - v = 0$. Но векторы v и v'

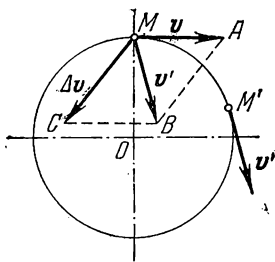


Рис. 150.

этих скоростей различны, и потому $\Delta v = v' - v = \vec{MB} - \vec{MA} = \vec{MC} \neq 0$. Не равно нулю, очевидно, ускорение точки $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, хотя по модулю скорость точки и не меняется.

Отсюда следует, что в общем случае модуль a ускорения точки $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ не равняется $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dv}{dt}$, т. е. не равняется производной dv/dt от численного значения скорости по времени²⁾. Поэтому нужно иметь в виду,

¹⁾ На рис. 149 вектор a условно изображен вектором \vec{ME} .

²⁾ $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ называется производной от вектор-функции, понятие которой устанавливается в векторном анализе.

что ни модуль, ни направление ускорения a точки из формулы (69) непосредственно определить нельзя. Способы их определения будут установлены в следующих параграфах, сейчас же только скажем еще о размерности ускорения:

$$[a] = \frac{[\text{скорость}]}{[\text{время}]} = \frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]} : [\text{время}] = \frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]^2}.$$

Каждому выбору единиц длины и времени соответствует своя единица ускорения. Ускорение может выражаться в м/с², см/с², м/мин² и т. д.

§ 59. Определение ускорения точки при задании ее движения естественным способом. Касательное и нормальное ускорения

Если движение точки задано естественным способом, вектор a ускорения точки обычно разлагают на составляющие, направленные по касательной и нормали к траектории точки. Подобное разложение удобно и потому, что данные составляющие играют, как мы увидим дальше, разную роль в изменении движения точки.

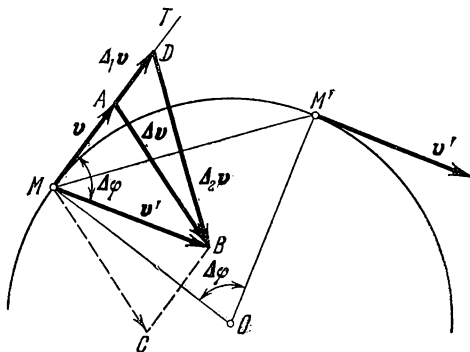


Рис. 151.

Для простоты рассмотрим сначала случай, когда точка движется по дуге окружности. Отметим положения M и M' (рис. 151) данной точки в моменты времени t и $t + \Delta t$. Скорости точки, соответствующие этим ее положениям, обозначим через v и v' . Перенесем начало вектора v' из точки M' в точку M , соединим концы A и

Векторов \mathbf{v} и \mathbf{v}' и дополним полученный треугольник MAB до параллелограмма $MABC$.

В соответствии со сказанным ранее (§ 58) вектор \overrightarrow{MC} представляет собой геометрическое приращение $\Delta \mathbf{v}$ вектора скорости точки за промежуток времени Δt . Вектор \overrightarrow{AB} (направленный по противоположной стороне параллелограмма $MABC$) можно рассматривать как тот же вектор $\Delta \mathbf{v}$, только перенесенный в точку A .

Отложим по касательной к траектории в точке M , т. е. по направлению вектора \mathbf{v} скорости, отрезок $MD = MB = v'$. Тогда численное значение вектора \overrightarrow{AD} будет $AD = MD - MA = v' - v = \Delta v$, т. е. равно приращению численного значения скорости v точки за промежуток времени Δt .

Разложим теперь вектор $\Delta \mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ на два составляющие вектора: $\Delta_1 \mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ и $\Delta_2 \mathbf{v} = \overrightarrow{DB}$, из которых первый нам известен по величине и направлению. Величину и направление второго вектора $\Delta_2 \mathbf{v}$ находим, соединив вектором точки D и B . Из векторного треугольника ADB следует, что $\Delta \mathbf{v} = \Delta_1 \mathbf{v} + \Delta_2 \mathbf{v}$.

Ускорение точки в момент t , как это следует из формулы (69),

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_1 \mathbf{v} + \Delta_2 \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_1 \mathbf{v}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Обозначим векторы $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_1 \mathbf{v}}{\Delta t}$ и $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 \mathbf{v}}{\Delta t}$, входящие в правую часть последнего равенства, соответственно через \mathbf{a}_t и \mathbf{a}_n и найдем их направления и численные значения. Начнем с вектора

$$\mathbf{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_1 \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Направление данного вектора не зависит от величины промежутка Δt времени. Он направлен всегда так же, как и вектор $\Delta_1 \mathbf{v}$, по касательной к траектории движения в данном положении точки. Отсюда и *составляющая \mathbf{a}_t ускорения точки носит название касательного или тангенциального ускорения точки* (от латинского слова «тангенс» — касательная).

Так как численное значение вектора $\Delta_1 \mathbf{v}$ равно приращению численного значения скорости v точки за рас-

смаатриваемый промежуток Δt времени, то численное значение касательного ускорения

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Так как численное значение v есть функция времени, а Δv есть приращение этой функции, то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом,

$$a_t = \frac{dv}{dt}. \quad (70)$$

Численное значение касательного ускорения точки равно производной по времени от численной величины скорости.

Если модуль скорости с течением времени возрастает (точка движется ускоренно), то производная dv/dt положительна, в этом случае касательное ускорение a_t направлено по касательной в сторону движения точки. Если модуль скорости с течением времени уменьшается (точка движется замедленно), то производная dv/dt отрицательна и касательное ускорение a_t направлено по касательной в сторону, противоположную направлению скорости точки.

Перейдем теперь к определению второй составляющей ускорения точки, т. е. к определению

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 v}{\Delta t}.$$

Направление данного вектора, очевидно, совпадает с предельным положением вектора $\Delta_2 v / \Delta t$, а следовательно¹⁾, и с предельным положением вектора $\Delta_2 v$.

Найдем из равнобедренного треугольника MBD (рис. 151) угол между направлением вектора $\Delta_2 v$ и касательной T к траектории точки: угол

$$(\Delta_2 v, T) = \angle MDB = \frac{180^\circ - \Delta \Phi}{2} = 90^\circ - \frac{\Delta \Phi}{2}.$$

Если рассматриваемый промежуток Δt времени будет неограниченно приближаться к нулю, то точка M' будет

¹⁾ От деления вектора на положительный скаляр Δt направление вектора не изменяется.

также неограниченно приближаться к точке M и угол $\Delta\varphi$ между касательными к кривой в этих точках будет стремиться к нулю. Следовательно, угол

$$(\widehat{a_n, T}) = \lim_{v' \rightarrow v} (\Delta_2 \vec{v}, \widehat{T}) = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left(90^\circ - \frac{\Delta\varphi}{2} \right) = 90^\circ.$$

Прямая, перпендикулярная к касательной к кривой в данной точке, называется *нормалью к кривой в этой точке*. Поэтому составляющая a_n ускорения точки носит название *нормального ускорения*. Как это непосредственно видно из рис. 151, *нормальное ускорение всегда направлено по нормали в сторону вогнутости траектории*. В случае движения точки по окружности нормальное ускорение направлено по радиусу к центру окружности, почему его и называют иногда *центростремительным ускорением*.

Найдем теперь модуль a_n нормального ускорения точки.

Треугольники MBD и $OM'M$ подобны (рис. 151), так как оба они равнобедренные и имеют равные углы при вершинах M и O ($\angle BMD = \angle MOM' = \Delta\varphi$, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Из подобия этих треугольников имеем

$$\frac{DB}{MM'} = \frac{MB}{OM'}.$$

В этой пропорции $DB = |\Delta_2 \vec{v}|$ — модуль вектора $\Delta_2 \vec{v}$, MM' — модуль вектора $\overrightarrow{MM'}$ перемещения точки за промежуток времени Δt , $MB = v'$ — модуль скорости точки в момент времени $t + \Delta t$ и $OM' = R$ — радиус окружности.

Подставляя данные значения в предыдущую пропорцию, будем иметь

$$\frac{|\Delta_2 \vec{v}|}{MM'} = \frac{v'}{R},$$

откуда

$$|\Delta_2 \vec{v}| = \frac{MM' \cdot v'}{R}.$$

Искомый модуль a_n нормального ускорения точки

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta_2 \vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM' \cdot v'}{R \Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{MM'}{\Delta t} \cdot v' \right).$$

Постоянную величину $1/R$ можно вынести за знак предела. Предел же произведения равен произведению соответствующих пределов (если они существуют). Поэтому

$$a_n = \frac{1}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM'}{\Delta t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v'.$$

В соответствии с определением скорости [стр. 207, формула (63)] $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM'}{\Delta t} = v$, т. е. этот предел равен модулю скорости точки. Так как при $\Delta t \rightarrow 0$ вектор v' неограниченно приближается к вектору v , то $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v' = v$.

Подставляя данные значения в предыдущее выражение для a_n , получаем

$$a_n = \frac{1}{R} \cdot v \cdot v = \frac{v^2}{R}.$$

Выражения для касательного и нормального ускорений точки, найденные для частного случая движения точки по окружности, оказываются справедливыми и для движения точки по любой траектории, если только ввести понятия о так называемых круге и радиусе кривизны кривой в данной точке.

Возьмем на кривой вблизи данной точки M и по обе стороны от нее еще две точки N и P (рис. 152). Через три точки M , N и P всегда можно, как известно, провести окружность, и притом только одну. Чем ближе от точки M мы будем брать точки N и P , тем меньше элемент кривой NMP будет отличаться от соответствующей ему дуги окружности. В пределе, когда точки N и P будут неограниченно приближаться к точке M , бесконечно малый элемент NMP кривой совпадет с дугой окружности и будет иметь с ней общую касательную в точке M .

Окружность, которая проходит через данную точку M и две другие бесконечно близкие к ней точки кривой, принято называть соприкасающимся кругом или кругом кривизны кривой в точке M . Радиус ρ^1) этого круга,

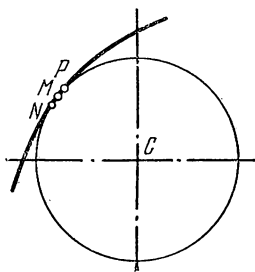


Рис. 152.

¹⁾ ρ — греческая буква «ро».

проведенного для данной точки кривой, называется радиусом кривизны кривой в этой точке. Центр этого круга называется центром кривизны кривой в данной точке М.

Величина k , обратная радиусу кривизны кривой в данной точке, называется кривизной кривой в этой точке,

$$k = \frac{1}{\rho}. \quad (71)$$

Чем меньше искривлена кривая в данной точке, тем больше ее радиус кривизны ρ и тем меньше ее кривизна k ¹⁾.

Всякий достаточно малый участок любой криволинейной траектории можно заменить дугой соответствующей окружности и, следовательно, представить себе эту криволинейную траекторию состоящей из дуг окружностей, описанных различными радиусами и из различных центров. Отсюда следует, что для определения нормального ускорения точки в любом ее криволинейном движении можно пользоваться установленной выше формулой, если только подставлять в нее вместо радиуса окружности радиус кривизны траектории в соответствующей ее точке. Таким образом, формуле для модуля a_n нормального ускорения можно придать следующую словесную формулировку: *нормальное ускорение точки равно квадрату скорости точки, деленному на радиус кривизны траектории в соответствующей ее точке кривой:*

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (72)$$

При задании движения точки естественным способом нам известна как траектория точки (а следовательно, и ее радиус кривизны в любой точке), так и уравнение движения точки по данной траектории $s = f(t)$. Зная это, мы можем определить скорость точки по формуле (64), а затем касательное и нормальное ускорения точки по формулам (70) и (72).

Зная же проекции вектора \mathbf{a} на две взаимно перпендикулярные оси (касательную и нормаль к данной точке

¹⁾ Для окружности радиус кривизны ρ и кривизна k постоянны и равны, соответственно, радиусу окружности r и величине $1/r$. Для прямой линии, которую можно рассматривать как дугу окружности бесконечно большого радиуса, радиус кривизны $\rho = \infty$ и кривизна $k = 1/\rho = 0$.

траектории), легко найти как модуль, так и направление самого вектора \mathbf{a} ускорения точки:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \\ \cos(\widehat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}_t) &= \frac{a_t}{a}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}_n) = \frac{a_n}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Если точка совершает неравномерное прямолинейное движение, то ее скорость изменяется по модулю. В этом случае $a_t = dv/dt \neq 0$. Радиус же кривизны траектории (прямой линии) $\rho = \infty$ и $a_n = v^2/\rho = 0$. Следовательно, при неравномерном прямолинейном движении точка имеет только касательное ускорение.

Если точка совершает равномерное криволинейное движение, то скорость точки изменяется только по направлению. При этом $v = \text{const}$ и $a_t = dv/dt = 0$. Радиус же кривизны траектории $\rho \neq \infty$ и $a_n = v^2/\rho \neq 0$. Следовательно, при равномерном криволинейном движении точка имеет только нормальное ускорение.

Если же точка совершает равномерное прямолинейное движение, то ее скорость не изменяется ни по модулю, ни по направлению. В этом случае $v = \text{const}$ и $\rho = \infty$. Следовательно, точка не будет иметь ни касательного, ни нормального ускорения. Ускорение ее $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 0$.

Рассмотренные частные случаи движения точки показывают, что касательное ускорение точки характеризует изменение ее скорости по численному значению, нормальное же ускорение характеризует изменение скорости точки по направлению.

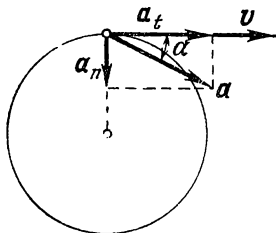
Задача 61. Точка движется по окружности радиуса $r = 4$ м по закону $s = 4,5t^3$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти модуль a ускорения точки и угол α между ускорением и скоростью в тот момент T , когда величина скорости равна 6 м/с.

Решение. Модуль скорости точки

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4,5t^3) = 13,5t^2 \text{ м/с.}$$

Рис. 153.

По условию задачи при $t = T$ скорость точки $v = 6$ м/с. Подставляя эти данные в выражение скорости, находим $6 = 13,5T^2$, откуда $T = \sqrt{\frac{6}{13,5}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ с.



Касательное ускорение точки \

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (13,5t^2) = 27t \text{ м/с}^2,$$

при $t = T = \frac{2}{3} \text{ с}$ $a_t = 27 \cdot \frac{2}{3} = 18 \text{ м/с}^2$.

Нормальное ускорение точки $a_n = v^2/\rho$. Подставляя в это выражение $v = 6 \text{ м/с}$ и $\rho = r = 4 \text{ м}$, находим $a_n = 6^2/4 = 9 \text{ м/с}^2$. Модуль полного ускорения точки $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{18^2 + 9^2} = 9\sqrt{5} \text{ м/с}^2$. Угол α (рис. 153) между ускорением a и скоростью v точки определится из формулы $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$. Отсюда $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 26^\circ 34'$

§ 60*. Определение ускорения точки по уравнениям ее движения в прямоугольных координатах

Пусть точка совершает плоское движение согласно заданным уравнениям

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t).$$

Отметим положения M и M' (рис. 154) движущейся

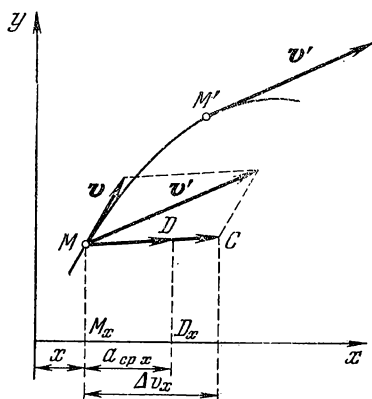


Рис. 154.

точки в моменты t и $t + \Delta t$. Скорости точки, соответствующие этим ее положениям, обозначим через v и v' .

Проекции этих векторов на ось x обозначим через v_x и v'_x . Перенеся начало вектора v' в точку M , построим так, как было сказано в предыдущем параграфе, вектор Δv приращения скорости точки M за время Δt :

$$\overrightarrow{MC} = \Delta v = v' - v.$$

Но проекция геометрической суммы векторов на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций на ту же ось составляющих векторов:

$$(\Delta v)_x = v'_x - v_x = \Delta v_x.$$

Следовательно, проекция на ось x вектора Δx приращения скорости точки равна приращению Δv_x проекции скорости точки на эту ось.

Вектор \overrightarrow{MD} среднего ускорения точки¹⁾ за промежуток времени Δt , согласно формуле (68), равен

$$\overrightarrow{MD} = \mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Проекция этого вектора на ось x

$$M_x D_x = a_{\text{ср } x} = \frac{(\Delta v)_x}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и обозначая проекцию истинного ускорения точки на ось x через a_x , получим

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{ср } x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

Проекция v_x скорости точки на ось x (т. е. скорость проекции данной точки на эту ось) есть функция от времени t ; Δv_x есть приращение этой функции соответствующее приращению Δt аргумента t , и $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ — производная данной функции.

Следовательно, $a_x = dv_x/dt$. Но проекция скорости точки на координатную ось сама равна (§ 57) производной от соответствующей координаты точки по времени $v_x = dx/dt$.

Таким образом,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Рассуждая аналогично, найдем проекцию ускорения точки на ось y :

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Проекций ускорения точки на неподвижные координатные оси равны первым производным по времени от

¹⁾ Вектор $\mathbf{a}_{\text{ср}}$ условно изображен вектором \overrightarrow{MD} на рис. 154. Конечно, модуль этого вектора может быть и больше модуля вектора \overrightarrow{MC} (если $\Delta t < 1$).

проекций скорости точки на соответствующие координатные оси или вторым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (74)$$

При перемещении точки за время Δt по дуге траектории из положения M в положение M' скорость проекции этой точки на ось x получает приращение Δv_x . Следовательно, dv_x/dt определяет собой ускорение проекции данной точки на ось x .

Таким образом, проекция ускорения точки на координатную ось определяет модуль и направление ускорения проекции этой точки на ту же ось и в тот же момент времени.

По проекциям вектора ускорения на координатные оси находятся его модуль и направление. Модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \quad (75)$$

Направление вектора ускорения определяется из формул

$$\cos(\hat{a}, \hat{x}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\hat{a}, \hat{y}) = \frac{a_y}{a}. \quad (76)$$

Если точка совершает движение не в плоскости, а как угодно в пространстве, то, зная третье уравнение движения точки $z = f_3(t)$, можно найти, аналогичным образом, проекцию a_z ускорения точки на третью координатную ось, а затем и модуль вектора ускорения точки и его направление в пространстве.

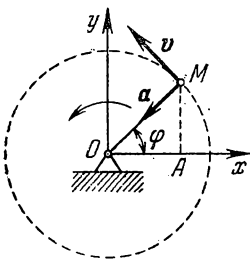


Рис. 155.

Задача 62. Написать уравнения движения в прямоугольных координатах и определить скорость и ускорение конца M кривошипа OM , вращающегося вокруг неподвижного центра O . Длина кривошипа $OM = r$. Угол поворота кривошипа относительно горизонтальной оси изменяется по закону $\varphi = \omega t$.

Решение. Возьмем систему координатных осей x и y с началом в точке O . Координаты точки M в этой системе (рис. 155):

$$x = OA = OM \cdot \cos \varphi = r \cos \omega t,$$

$$y = AM = OM \cdot \sin \varphi = r \sin \omega t.$$

Проекции скорости точки M на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t.$$

Модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-r\omega \sin \omega t)^2 + (r\omega \cos \omega t)^2} = r\omega = \text{const.}$$

Скорость точки M по модулю постоянна. Направление вектора \mathbf{v} скорости точки можно определить из формул (67):

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, x}) = \frac{v_x}{v} = -\frac{r\omega \sin \omega t}{r\omega} = -\sin \omega t = -\sin \varphi,$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, y}) = \frac{v_y}{v} = \frac{r\omega \cos \omega t}{r\omega} = \cos \omega t = \cos \varphi.$$

Проекции ускорения точки M на координатные оси:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2 \sin \omega t.$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-r\omega^2 \cos \omega t)^2 + (-r\omega^2 \sin \omega t)^2} = r\omega^2 = \text{const.}$$

Ускорение точки M по модулю также постоянно. Оно не равно нулю, несмотря на то что скорость этой точки по величине постоянна. Вследствие криволинейности траектории точки все время изменяется направление скорости.

Направление вектора \mathbf{a} ускорения точки M можно определить из формул (76):

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, x}) = \frac{a_x}{a} = -\frac{r\omega^2 \cos \omega t}{r\omega^2} = -\cos \omega t = -\cos \varphi,$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, y}) = -\frac{r\omega^2 \sin \omega t}{r\omega^2} = -\sin \omega t = -\sin \varphi.$$

Нетрудно убедиться в том, что при равномерном движении точки M по окружности ее ускорение \mathbf{a} направлено по радиусу r к центру окружности.

Задача 63. Точка совершает движение по винтовой линии согласно уравнениям

$$x = 2 \cos 4t, \quad y = 2 \sin 4t, \quad z = 2t$$

(x, y, z — в метрах, t — в секундах). Определить численные значения скорости и ускорения точки, а также радиус кривизны ее траектории.

Решение. Проекции скорости на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -8 \sin 4t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 8 \cos 4t, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 2.$$

Модуль скорости:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-8 \sin 4t)^2 + (8 \cos 4t)^2 + 2^2} = \\ &= \sqrt{64 (\sin^2 4t + \cos^2 4t) + 4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ м/с} = \text{const.} \end{aligned}$$

Проекции ускорения на координатные оси:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -32 \cos 4t, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -32 \sin 4t, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-32 \cos 4t)^2 + (-32 \sin 4t)^2} = 32 \text{ м/с}^2.$$

Так как модуль v скорости — величина постоянная, то касательное ускорение $a_t = dv/dt = 0$. Таким образом, ускорение a точки состоит только из ее нормального ускорения $a = a_n = v^2/\rho$. Отсюда находим радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{a} = \frac{(2\sqrt{17})^2}{32} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8} \text{ м.}$$

ГЛАВА XIII

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

§ 61. Равномерное движение точки

Равномерным движением точки, как мы знаем, называется такое движение, при котором точка за любые равные промежутки времени проходит равные расстояния.

Модуль скорости точки в этом движении $v = s/t = \text{const.}$ Отсюда следует, что при этом движении точки

$$S = vt. \quad (77)$$

Путь, пройденный точкой при равномерном движении¹⁾, равен произведению скорости на время. По формуле (77) можно определить для равномерного движения точки любую из трех величин S , v и t , когда две другие известны.

Если в начальный момент точка находилась не в начале отсчета расстояний, а на некотором расстоянии s_0 от него, то *расстояние точки от начала отсчета в момент времени t будет равно*

$$s = s_0 + vt. \quad (78)$$

Это уравнение определяет закон *равномерного движения точки*. Так как расстояние точки от начала отсчета изменяется во времени по линейному закону, то графиком движения точки (графиком зависимости $s = f(t)$) является прямая линия.

По графику движения точки можно найти не только расстояние точки от начала отсчета, но и скорость этого движения. Пусть графиком данного равномерного

¹⁾ И только при этом движении.

движения точки служит прямая линия (рис. 156), наклоненная под углом α к оси времени. Допустим также, что при построении этого графика были приняты масштабы: времени μ_t с/мм, т. е. отрезок в 1 мм на оси времени соответствует μ_t секундам, и расстояний μ_s м/мм, т. е. отрезок в 1 мм на оси расстояний соответствует μ_s метрам.

Отметим на оси времени какой-либо промежуток времени $t = OA \cdot \mu_t = DC \cdot \mu_t$. Этому промежутку времени соответствует пройденный путь $S = \mu_s(s - s_0) = \mu_s(AB - AC) = \mu_s \cdot BC$. Тогда скорость равномерного движения точки

$$v = \frac{S}{t} = \frac{BC}{DC} \cdot \frac{\mu_s}{\mu_t} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha.$$

Скорость равномерного движения точки численно равна тангенсу угла наклона прямолинейного графика

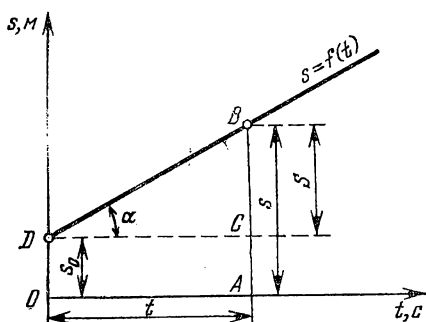


Рис. 156.

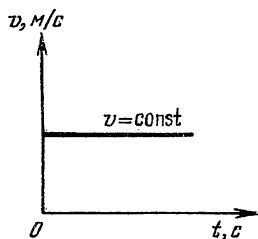


Рис. 157.

ее движения к оси времени, умноженному на отношение масштаба расстояния к масштабу времени:

$$v = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha. \quad (79)$$

Аналогично тому, как строится график расстояний, можно построить, в соответствующих масштабах, для каждого движения точки и график ее скорости, т. е. график функции $v = f'(t)$.

Так как при равномерном движении точки ее скорость есть величина постоянная, то графиком скорости равномерного движения будет прямая, параллельная оси времени (рис. 157).

Если точка совершает криволинейное равномерное движение, то она имеет, как мы уже говорили (стр. 225), только нормальное ускорение $a = a_n = v^2/\rho$. Если же точка совершает прямолинейное равномерное движение, то она вообще не имеет никакого ускорения, $a = 0$.

Задача 64. График движения точки представляет собой прямую (рис. 158), которая на оси времени отсекает отрезок $a = -10$ мм, а на оси расстояний — отрезок $b = 25$ мм. При построении графика приняты масштабы: расстояний $\mu_s = 2$ км/мм и времени $\mu_t = 0,2$ ч/мм. Определить скорость точки и написать уравнение ее движения по траектории.

Решение. Так как график движения точки, т. е. график функции $s = f(t)$ представляет собой прямую линию, то движение точки будет равномерным. По формуле (79) скорость точки

$$v = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \cdot \frac{\mu_s}{\mu_t} = \frac{25}{10} \cdot \frac{2 \text{ км/мм}}{0,2 \text{ ч/мм}} = 25 \text{ км/ч.}$$

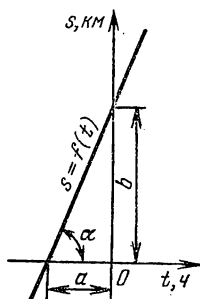


Рис. 158.

Напишем теперь уравнение движения точки. При $t = 0$ расстояние точки от начала отсчета $s_0 = b\mu_s = 25 \text{ мм} \cdot 2 \text{ км/мм} = 50 \text{ км}$. Уравнение движения точки принимает, следовательно, вид $s = s_0 + vt = 50 + 25t$ (где s выражено в километрах, t — в часах).

§ 62. Прямолинейное неравномерное движение точки

Если принять прямолинейную траекторию точки за координатную ось x , то уравнение движения точки по траектории принимает вид $s = x = f(t)$. Численное значение скорости определяется формулой

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}. \quad (80)$$

Численное значение скорости прямолинейного движения точки (по оси координат) равно производной от координаты точки по времени.

Направлен вектор v скорости точки всегда в сторону ее движения, т. е. в данном случае по оси x . При этом, если производная dx/dt при данном значении t положительна, то направление скорости совпадает с положительным направлением оси x . Если же dx/dt отрицательна, то скорость направлена в отрицательную сторону

оси x . При прямолинейном движении точки ее скорость может изменяться только по модулю и точка будет иметь только касательное ускорение

$$a = a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (81)$$

Численная величина ускорения прямолинейного движения точки равна первой производной по времени от численной величины ее скорости¹⁾ или второй производной от координаты точки по времени.

Если вторая производная d^2x/dt^2 при данном значении t положительна, то вектор a ускорения направлен в положительную сторону оси x ; если d^2x/dt^2 отрицательна, то вектор a направлен в отрицательную сторону оси x . Следовательно, если производные dx/dt и d^2x/dt^2 имеют одинаковые знаки, то векторы v и a направлены в одну и ту же сторону и движение точки будет ускоренным. При противоположных знаках dx/dt и d^2x/dt^2 движение будет замедленным.

Когда аналитическое исследование движения точки представляется затруднительным или когда закон ее движения задан графически, скорость, ускорение и путь, пройденный точкой, можно найти графическим способом.

Пусть известен²⁾ (рис. 159) график движения точки (кривая $s = f(t)$). Допустим также, что при построении этого графика были приняты масштабы: времени μ_t с/мм, т. е. отрезок в 1 мм на оси времени соответствует μ_t секундам, и расстояний μ_s м/мм, т. е. отрезок в 1 мм на оси расстояний соответствует μ_s метрам.

Отметим на оси времени два близких момента t_1 и t_2 . Соответствующие им расстояния движущейся точки от начала отсчета определяются по графику движения отрезками AM_1 и BM_2 . Учитывая принятые масштабы, будем иметь, что приращению времени $\Delta t = t_2 - t_1 = M_1C \cdot \mu_t$ соответствует приращение расстояния движущейся

¹⁾ Формула (81) справедлива только для прямолинейного движения точки. При криволинейном движении точка обязательно будет иметь нормальное ускорение и ее полное ускорение уже не равно первой производной от численной величины скорости по времени или второй производной от пути по времени.

²⁾ График функции $s = f(t)$ может быть построен, как мы говорили ранее (стр. 199 и 200), различными способами. Так как при неравномерном движении точки $s = x$ может быть любой функцией t , то графиком такого движения будет некоторая кривая.

точки

$$\Delta s = (M_2B - M_1A) \mu_s = M_2C \cdot \mu_s.$$

Следовательно, численное значение средней скорости точки за рассматриваемый промежуток времени Δt равно

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{M_2C}{M_1C} \cdot \frac{\mu_s}{\mu_t} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha',$$

где $\operatorname{tg} \alpha'$ — тангенс угла между секущей, проведенной через точки графика движения, соответствующие началу

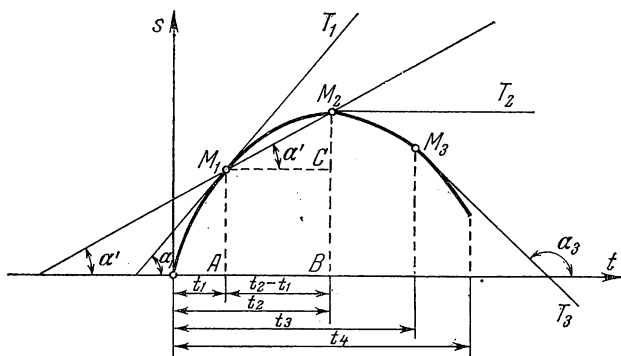


Рис. 159.

и концу данного промежутка времени, и положительным направлением оси времени.

Для определения скорости точки в какой-либо момент времени t будем устремлять к нулю промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ так, чтобы момент t_2 неограниченно приближался к моменту времени t_1 . Тогда точка M_2 будет неограниченно приближаться на графике движения к точке M_1 , и в пределе секущая M_1M_2 обратится в касательную M_1T_1 , а угол α' — в угол α_1 (рис. 159). Таким образом,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Численная величина v скорости в любой момент времени равна тангенсу угла α между положительным направлением оси времени и касательной к графику движения в соответствующей его точке, умноженному на

отношение масштаба расстояния к масштабу времени:

$$v = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha. \quad (82)$$

Формула (82) позволяет определить не только модуль скорости, но и ее направление. Скорость точки будет направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояний (в сторону возрастающих s) при положительном значении $\operatorname{tg} \alpha$ и в противоположную сторону при отрицательном значении $\operatorname{tg} \alpha$.

Обращаясь к рис. 159, видим, что моменту t_1 соответствует возрастание, с увеличением времени t , расстояния s точки от начала отсчета. Угол α_1 между касательной к соответствующей точке графика и положительным направлением оси t — острый, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha_1 > 0$ и $v_1 > 0$. Угол α_1 будет оставаться острым, уменьшаясь непрерывно по величине, для любого момента времени в промежутке от нуля до момента t_2 . Поэтому в течение этого промежутка времени точка совершает замедленное движение в положительную сторону отсчета расстояний. В момент t_2 касательная к графику параллельна оси t и угол $\alpha = 0$, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = 0$ и $v_2 = 0$. В момент t_2 скорость точки переходит через нуль и точка меняет направление движения на противоположное. Угол α_3 между касательной к кривой в точке M_3 , соответствующей моменту t_3 , и осью t — тупой, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha_3 < 0$ и $v_3 < 0$. В промежутке от t_2 до t_4 угол α , оставаясь тупым, непрерывно уменьшается, а тангенс угла α , оставаясь отрицательным, возрастает по абсолютной величине. Поэтому в течение этого промежутка времени точка совершает ускоренное движение в сторону, противоположную положительному направлению отсчета расстояний.

Как видим, график движения позволяет не только найти скорость точки в любой момент времени, но и дает представление о характере ее движения за весь период времени.

Для того чтобы более наглядно видеть характер изменения скорости точки и иметь возможность определить ее ускорение графически, нужно построить график скорости, т. е. график функции $v = f'(t)$. Для его построения возьмем две взаимно перпендикулярные координатные оси и на оси абсцисс будем откладывать в каком-либо масштабе μ_t значения времени t , а по оси орди-

нат — численные значения скорости v точки в каком-либо масштабе μ_v .

Зная¹⁾ для различных моментов времени t соответствующие им значения скорости v , построим по координатам t и v ряд точек. Соединяя эти точки непрерывной линией, получим кривую (рис. 160), являющуюся графиком функции $v = f'(t)$.

Так как по формуле (70) численное значение касательного ускорения точки $a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, где Δv — приращение модуля скорости, то, рассуждая так же, как и при графическом определении скорости точки, мы придем к аналогичному выводу: численная величина a_t касательного ускорения точки в любой момент времени равна тангенсу угла β между положительным направлением оси времени и касательной к графику скорости в соответствующей его точке, умноженному на отношение масштаба скорости к масштабу времени:

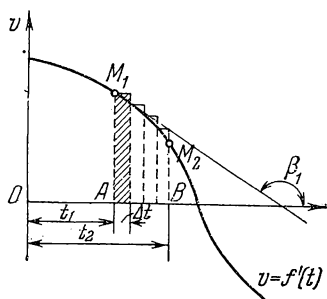


Рис. 160.

$$a_t = \frac{\mu_v}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta. \quad (83)$$

Формула (83) определяет касательное ускорение точки не только по модулю, но и по направлению. Так, для момента t_1 угол $\beta = \beta_1$ — тупой (рис. 160), и потому $\operatorname{tg} \beta_1 < 0$ и $a_t < 0$. Следовательно, в этот момент ускорение a_t направлено по касательной к траектории в сторону, противоположную движению точки. В случае прямолинейного движения нормальное ускорение $a_n = 0$, и потому для такого движения формула (83) определяет полное ускорение точки $a = a_t$.

Графическое определение скорости $v = ds/dt$ по графику движения $s = f(t)$ и касательного ускорения $a_t = dv/dt$ по графику скорости $v = f'(t)$ называют часто графическим дифференцированием соответствующей функции.

¹⁾ Значения скорости для различных моментов времени могут быть найдены из аналитической зависимости $v = f'(t)$, если она известна, или графически, как это было указано выше.

Зная график скорости точки, можно графическим путем найти и путь S , пройденный точкой за какой-либо промежуток времени. Пусть, например, требуется определить по графику скорости (рис. 160) путь, пройденный точкой за промежуток времени $t_2 - t_1$. Разделим весь этот промежуток времени на большое число n малых промежутков Δt . Вследствие малости промежутка Δt движение точки за это время можно считать равномерным, с той скоростью v , которую имела точка в начале данного промежутка. Тогда пройденный за это время точкой путь $\Delta S \approx v \Delta t$, т. е. приближенно выражается площадью заштрихованного на рис. 160 прямоугольника. Чем больше число n промежутков, на которые разбивается данный промежуток времени $t_2 - t_1$, тем меньше будет промежуток Δt и тем с большей точностью можно считать движение точки равномерным за время этого промежутка. Если n будет стремиться к бесконечности, то Δt будет стремиться к нулю и длина S всего пути, пройденного точкой за время $t_2 - t_1$, будет равна пределу суммы площадей бесконечно большого числа элементарных прямоугольников, на которые разбивается при этом криволинейная фигура AM_1M_2B , т. е. будет равна в некотором масштабе площади этой фигуры.

Масштаб, в котором площадь фигуры AM_1M_2B выражает длину пройденного точкой пути, зависит от принятых при построении графика скорости масштабов скорости и времени. Пусть, например, график скорости строился для удобства вычисления площади криволинейной фигуры на миллиметровой бумаге и площадь фигуры определена в квадратных миллиметрах. Пусть также при построении графика скорости были приняты масштабы скорости μ_v (м/с)/мм, т. е. отрезок в 1 мм по оси ординат изображает скорость в μ_v м/с, и времени μ_t с/мм, т. е. отрезок в 1 мм на оси абсцисс изображает промежуток времени в μ_t с. Тогда пройденный точкой путь S выразится в метрах следующим образом:

$$S = \text{пл } AM_1M_2B \text{ мм}^2 \cdot \mu_v \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}} \cdot \mu_t \frac{\text{с}}{\text{мм}} = \\ = \mu_v \mu_t \cdot \text{пл } AM_1M_2B \text{ м,}$$

где пл AM_1M_2B выражена в квадратных миллиметрах.

Таким образом, *путь S , пройденный точкой за некоторый промежуток времени, равен площади фигуры*

AM_1M_2B , ограниченной кривой скорости, осью времени и ординатами, соответствующими началу и концу данного промежутка времени, умноженной на произведение масштабов скорости и времени:

$$S = \mu_v \mu_t \cdot \text{пл } AM_1M_2B. \quad (84)$$

Так как скорость точки выражается формулой $v = dS/dt$ и, следовательно, пройденный путь — формулой $S = \int v dt$, то определение пройденного точкой пути S по графику ее скорости называют часто графическим интегрированием. Для наглядного представления о характере изменения ускорения при движении точки можно построить график ускорения, т. е. график функции

$$a_t = f''(t).$$

Строится он аналогично графику скоростей, только по оси ординат откладывается не скорость точки, а ее ускорение (в каком-либо масштабе μ_a).

Задача 65. Жестко связанная с направляющей DE (рис. 161, а) рама AB , называемая обычно кулисной, приводится в движение кривошипом OC (расположенным впереди рамы и направляющей). Кривошип вращается вокруг точки O равномерно, причем угол φ изменяется со временем по закону $\varphi = \frac{\pi}{6}t$. Концом C кривошип шарнирно соединен с ползуном, скользящим в прорези рамы. Длина кривошипа $OC = a = 250$ мм. Определить движение рамы.

Решение. При вращении кривошипа рама AB совершает колебательное движение около точки O , причем все точки рамы совершают одинаковое прямолинейное движение. Рассмотрим движение какой-нибудь одной точки рамы, например ее середины M . Траектория этой точки будет прямая, совпадающая с осью DE ползуна.

Примем неподвижную точку O (ось вращения кривошипа) за начало отсчета расстояний и напомним уравнение движения точки M .

Из треугольника OCM (рис. 161, а) находим $OM = OC \cdot \cos \varphi$. Обозначив расстояние точки M от начала O отсчета через s и

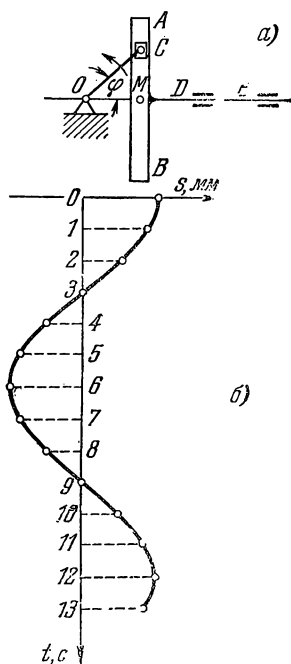


Рис. 161.

приняв во внимание, что по условиям задачи $OC = a = 250$ мм и угол $\varphi = \frac{\pi}{6} t$ радиан, будем иметь

$$s = a \cos \varphi = a \cos \frac{\pi}{6} t \text{ мм.} \quad (I)$$

Движение точки, совершающееся по подобному закону (т. е. по закону $s = a \cos \omega t$ или $s = a \sin \omega t$), называется *гармоническим колебательным движением*. Основными характеристиками такого движения являются: *амплитуда a колебания точки, т. е. ее наибольшее отклонение от среднего положения, и период T колебания, т. е. время одного полного колебания точки.*

Очевидно, что в начале и в конце промежутка времени T точка должна находиться на одном и том же расстоянии s от начала отсчета расстояний. Для этого необходимо, чтобы за время T аргумент косинуса в уравнении (I) изменялся на величину 2π , т. е. чтобы имело место следующее тождество: $\cos \omega(t + T) \equiv \cos(\omega t + 2\pi)$, откуда $T = \frac{2\pi}{\omega}$. В нашем примере $T = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ с и $a = 250$ мм. На рис. 161, б построен график движения точки M . По вертикальной оси отложено время t в секундах, по горизонтальной оси — расстояние s в мм.

Полученная кривая представляет собой косинусоиду, т. е. смещенную относительно начала координат синусоиду.

§ 63. Равномерно переменное движение точки

Часто встречающимся на практике *равномерно переменным* (равномерно ускоренным или равномерно замедленным) *движением точки называется такое ее движение, когда в равные, произвольно взятые промежутки времени модуль скорости точки изменяется на одну и ту же величину.*

Изменение скорости точки по модулю характеризуется, как мы знаем, касательным ускорением. Отсюда следует, что при равномерно переменном движении точки величина ее касательного ускорения $a_t = dv/dt = \text{const}$. Поэтому, разделяя переменные и интегрируя уравнение, будем иметь

$$dv = a_t dt, \quad v = \int a_t dt = a_t t + C_1.$$

Произвольную постоянную C_1 находим из начальных условий. Пусть в начальный момент $t = 0$ точка имела скорость, равную v_0 . Подставляя в предыдущее равенство $t = 0$ и $v = v_0$, находим $C_1 = v_0$. Следовательно, *формула для скорости равномерно переменного движения точки* принимает известный из физики вид:

$$v = v_0 + a_t t, \quad (85)$$

где v — модуль скорости точки в данный момент времени, v_0 — модуль начальной скорости точки, т. е. скорости в момент $t = 0$, a_t — алгебраическая величина касательного ускорения точки, положительная при ускоренном движении и отрицательная при замедленном движении.

Если $a_t < 0$, т. е. касательное ускорение точки направлено в сторону, противоположную направлению начальной скорости точки, то движение будет равномерно замедленным до тех пор, пока скорость v точки не сделается равной нулю, что соответствует, как видно из формулы (85), моменту $t = -v_0/a_t$. После этого момента, при сохранении направления касательного ускорения, скорость v изменит свое направление на противоположное, модуль ее будет увеличиваться, движение точки будет равномерно ускоренным, и a_t станет величиной положительной.

Для определения пути S , пройденного точкой при равномерно переменном движении, воспользуемся зависимостью (64): $v = dS/dt$. Отсюда имеем $dS = v dt = (v_0 + a_t t) dt = v_0 dt + a_t t dt$. Интегрируя это уравнение, получаем

$$S = \int v_0 dt + \int a_t t dt = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2} + C_2.$$

Произвольную постоянную C_2 находим из начальных условий, полагая, что при $t = 0$ путь, пройденный точкой, $S = 0$. Подставляя эти значения t и S в предыдущее равенство, будем иметь $C_2 = 0$. Таким образом, получается также известная из физики формула для пути при равномерно переменном движении точки:

$$S = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}. \quad (86)$$

В этой формуле под a_t также понимается алгебраическое значение касательного ускорения, т. е. оно должно подставляться в формулу с соответствующим ему знаком.

Заметим, что для вычисления пути, пройденного точкой, формулой (86) можно пользоваться только при условии движения точки в одном направлении. Если при равномерно замедленном движении скорость точки переходит через нуль, то, как мы говорили выше, меняется знак касательного ускорения. В этом случае путь,

пройденный точкой, $S = S_1 + S_2$, где S_1 — путь, пройденный точкой за время ее равномерно замедленного движения, т. е. за промежуток времени от $t = 0$ до $t = -v_0/a_t$, а S_2 — путь, пройденный точкой за время ее равномерно ускоренного движения после перехода скорости точки через нуль, т. е. после момента времени $t = -v_0/a_t$.

Формула (86) может служить и в качестве уравнения равномерно переменного движения точки по ее траектории, т. е. для определения расстояния s точки от начала отсчета расстояний, при условии, что точка в начальный момент находилась в начале отсчета. Если же в момент $t = 0$ точка находилась не в начале отсчета, а в некотором положении, определяемом расстоянием s_0 от начала отсчета, то в момент t расстояние точки от начала отсчета будет $s = s_0 + S$.

Подставляя в последнее выражение значение пройденного пути S , получаем общее уравнение равномерно переменного движения точки по ее траектории:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}. \quad (87)$$

Формулы (85), (86) и (87) одинаково справедливы как для прямолинейного, так и для криволинейного равномерно переменного движения точки.

При прямолинейном движении точки модуль ее нормального ускорения $a_n = v^2/\rho = 0$, и потому ее полное ускорение $a = a_t$. Поэтому обычно, применяя формулы (85), (86) и (87) к прямолинейному равномерно переменному движению точки, индекс t в обозначении ускорения опускают.

В случае же криволинейного равномерно переменного движения точки в названные формулы входит модуль только одной касательной составляющей a_t ускорения a точки. При любом криволинейном движении точки модуль нормальной составляющей ускорения $a_n = v^2/\rho \neq 0$ и потому модуль ускорения точки $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \neq a_t$.

Примером равномерно переменного движения точки может служить движение тела по вертикали под действием силы тяжести. Из физики известно, что под действием постоянной силы тело получает постоянное ускорение. Если пренебречь сопротивлением воздуха и изменением силы тяжести в зависимости от высоты тела, то

можно считать, что ускорение свободно падающего или брошенного вертикально вверх тела, обычно обозначаемое буквой g , постоянно. Ускорение это изменяется с изменением географической широты и высоты места над уровнем моря, но изменение это незначительно¹⁾, и поэтому им обычно пренебрегают, принимая за «нормальное» ускорение свободно падающего тела $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Полагая в формулах (85) и (86) ускорение $a_t = g$ и $S = h$, получаем формулы для движения тела по вертикали под действием силы тяжести:

$$v = v_0 \pm gt, \quad (88)$$

$$h = v_0 t \pm \frac{gt^2}{2}. \quad (89)$$

В этих формулах перед ускорением g надо брать знак плюс в случае свободного падения тела (равномерно ускоренное движение) и знак минус для движения тела, брошенного вертикально вверх (равномерно замедленное движение).

В случае, если тело начинает падать без начальной скорости, то $v_0 = 0$ и предыдущие формулы принимают вид

$$v = gt \quad \text{и} \quad h = \frac{gt^2}{2}.$$

Исключая из этих равенств время t , находим

$$t = \frac{v}{g} \quad \text{и} \quad h = \frac{gv^2}{2g^2} = \frac{v^2}{2g}.$$

Отсюда получается хорошо известная *формула Галилея*:

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (90)$$

где v — скорость тела при падении его без начальной скорости с высоты h .

Так как формулы (88), (89) и (90) выведены из условия движения тела в пустоте (при отсутствии сопротивления воздуха), то ими можно пользоваться в реальных условиях только в тех случаях, когда сопротивлением воздуха можно пренебречь, т. е. когда вес тела велик по сравнению с силой сопротивления воздуха, а высота h невелика.

¹⁾ На широте 45° ускорение $g = 980,665 \text{ см/с}^2 \approx 9,81 \text{ м/с}^2$.

Задача 66. Точка, имевшая начальную скорость $v_0 = 3$ м/с, получила ускорение, равное по абсолютной величине 1 м/с² и направленное в сторону, противоположную начальной скорости точки. Определить путь, пройденный точкой за время $t = 10$ с, и ее расстояние от начала отсчета в конце десятой секунды, если в начальный момент точка находилась от начала отсчета на расстоянии $s_0 = 5$ м.

Решение. Полагая $v = 0$, из формулы (85) $v = v_0 + a_t t$, где $a_t = -1$, определяем момент перехода скорости точки через нуль:

$$t = -\frac{v_0}{a_t} = -\frac{3}{-1} = 3 \text{ с.}$$

Следовательно, в течение первых трех секунд своего движения точка двигалась равномерно замедленно в сторону положительного отсчета расстояний, в последующие же семь секунд точка двигалась равномерно ускоренно в противоположную сторону.

Путь, пройденный при равномерно замедленном движении точки,

$$S_1 = v_0 t - \frac{|a_t| t^2}{2} = 3 \cdot 3 - \frac{1 \cdot 3^2}{2} = 4,5 \text{ м.}$$

Путь, пройденный при равномерно ускоренном движении точки,

$$S_2 = v_0 t + \frac{|a_t| t^2}{2} = 0 + \frac{1 \cdot 7^2}{2} = 24,5 \text{ м.}$$

Путь, пройденный точкой за 10 с ее движения,

$$S = S_1 + S_2 = 4,5 + 24,5 = 29 \text{ м.}$$

Расстояние точки от начала отсчета в конце десятой секунды определяем по формуле (87), полагая $a_t = -1$:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2} = 5 + 3 \cdot 10 - \frac{1 \cdot 10^2}{2} = -15 \text{ м.}$$

В конце десятой секунды точка находится от начала отсчета на расстоянии 15 м, отложенном по траектории точки в сторону, противоположную положительному направлению отсчета. Расстояние s легко найти и другим путем. Очевидно, что

$$s = s_0 + S_1 - S_2 = 5 + 4,5 - 24,5 = -15 \text{ м.}$$

Задача 67. Поезд, двигаясь по закруглению равномерно ускоренно, приобретает через 3 мин после отхода от станции скорость $v = 54$ км/ч. Определить ускорение поезда через 2 мин после отхода его от станции, если радиус закругления пути $\rho = 500$ м.

Решение. Полагая $v = 54$ км/ч $= \frac{54 \cdot 1000}{3600} = 15$ м/с, $v_0 = 0$ и $t = 3$ мин $= 180$ с, из формулы (85) определяем касательное ускорение поезда:

$$a_t = \frac{v}{t} = \frac{15}{180} = \frac{1}{12} \text{ м/с}^2.$$

Так как движение поезда равномерно ускоренное, то его касательное ускорение постоянно.

Нормальное же ускорение поезда, определяемое формулой (72): $a_n = v^2/\rho$, зависит от скорости движения, т. е. будет различным для разных моментов времени.

Определяем скорость поезда в конце второй минуты после отхода его от станции:

$$v = v_0 + v_t t = 0 + \frac{1}{12} \cdot 120 = 10 \text{ м/с.}$$

Тогда нормальное ускорение поезда в этот момент будет равно

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{10^2}{500} = 0,2 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение поезда в конце второй минуты

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \approx 0,217 \text{ м/с}^2.$$

Задача 68. Торможение поезда, движущегося со скоростью 36 км/ч, начинается за 200 м до остановки. Считая движение поезда равномерно переменным, найти время торможения и касательное ускорение, получаемое поездом при торможении.

Решение. Для определения неизвестного времени t торможения и касательного ускорения a_t поезда имеем систему двух уравнений (85) и (86):

$$v = v_0 + a_t t \quad \text{и} \quad S = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}.$$

Начальная скорость поезда $v_0 = 36 \text{ км/ч} = 10 \text{ м/с}$. Конечная скорость поезда $v = v_0 + a_t t = 0$, откуда $a_t = -v_0/t$. Подставляя это выражение a_t в формулу пути, будем иметь

$$S = v_0 t - \frac{v_0 t}{2} = \frac{v_0 t}{2}.$$

Отсюда время торможения

$$t = \frac{2S}{v_0} = \frac{2 \cdot 200}{10} = 40 \text{ с.}$$

Касательное ускорение поезда.

$$a_t = -\frac{v_0}{t} = -\frac{10}{40} = -0,25 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус показывает, что ускорение направлено в сторону, противоположную движению точки, т. е. мы имеем дело с замедленным движением поезда.

Задача 69. Камень упал в колодец. Через 4 с был услышан плеск воды. Определить глубину колодца, 1) считая, что звук распространяется мгновенно, 2) принимая во внимание, что скорость звука $v_{зв} = 333 \text{ м/с}$.

Решение. 1) Пренебрегая временем распространения звука, определяем глубину колодца: $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2} = 0 + \frac{9,81 \cdot 4^2}{2} \approx 78,5 \text{ м.}$

2) Время t_1 падения камня на глубину h колодца находится из формулы $h = gt_1^2/2$, откуда $t_1 = \sqrt{2h/g}$

Время распространения звука на расстояние h равно

$$t_2 = \frac{h}{v_{зв}}.$$

Очевидно, что промежуток времени t от начала падения камня до момента, когда был услышан плеск воды, равен

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_{зв}}.$$

Подставляя в полученное уравнение $t = 4$ с, $g = 9,81$ м/с² и $v_{зв} = 333$ м/с, находим $h \approx 70,4$ м.

Задача 70. Прямолинейное равномерно переменное движение точки задано уравнением

$$s = 40 + 2t + 0,5t^2$$

(s — в метрах, t — в секундах). Построить графики движения, скорости и ускорения точки в промежутке от $t = 0$ до $t = 10$ с и определить (аналитически и графически) скорость v , пройденный путь S и ускорение a точки через 10 секунд.

Решение. Для построения графика движения точки составляем таблицу, давая различные значения моменту времени t и вычисляя по заданному уравнению соответствующие им значения расстояний s .

$t, \text{ с}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s, \text{ м}$	40	42,5	46	50,5	56	62,5	70	78,5	88	98,5	110

Принимая масштабы расстояний $\mu_s = 2$ м/мм и времени $\mu_t = 0,2$ с/мм, строим (рис. 162) график движения точки, т. е. кривую $s = f(t)$. Эта кривая представляет собой параболу с вершиной, не находящейся в начале координат. Так как графиком всякой функции вида $y = ax^2 + bx + c$ служит параболa, то вообще графиком равномерно переменного движения точки всегда является некоторая параболa. Для построения графика скорости определяем ее алгебраическое значение по формуле (64):

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 + 0,5 \cdot 2t = 2 + t.$$

Так как зависимость $v = f'(t)$ выражается уравнением первой степени, то графиком скорости будет прямая линия, и для ее построения достаточно, следовательно, знать две точки, через которые она проходит, например: при $t = 0$ $v = 2$ м/с, при $t = 10$ с $v = 2 + 10 = 12$ м/с.

Принимаем масштабы скорости $\mu_v = 0,2$ м/(с · мм) и времени $\mu_t = 0,2$ с/мм и по найденным координатам t и v двух точек строим

(рис. 163) прямую, являющуюся графиком скорости данного равномерно переменного движения точки.

Скорость всякого равномерно переменного движения точки выражается формулой $v = v_0 + a_t t$, т. е. уравнением первой степени относительно t и v , и потому графиком скорости равномерно переменного движения точки всегда является некоторая прямая.

Скорость точки в любой момент времени можно было бы найти и графически по графику ее движения. Для того чтобы найти этим путем скорость точки при $t = 10$ с, приведем касательную к соответствующей точке графика (рис. 162) и найдем тангенс угла между этой касательной и положительным направлением оси t . Из рис. 162 находим $\operatorname{tg} \alpha \approx 11/9$. Тогда по формуле (82)

$$v = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{11}{9} \cdot \frac{2 \text{ м/мм}}{0,2 \text{ с/мм}} \approx 12 \text{ м/с.}$$

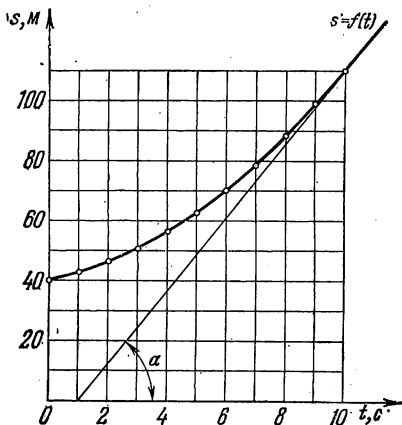


Рис. 162.

Ускорение точки при прямолинейном движении всегда равно $a = a_t = dv/dt$. Следовательно, в нашем случае

$$a = \frac{d}{dt} (2 + t) = 1 \text{ м/с}^2 = \text{const.}$$

Найдем теперь ускорение точки графическим путем. Раз график скорости равномерно переменного движения есть прямая линия, то касательная к этому графику в любой его точке совпадает с данной прямой, и потому из общего правила графического определения касательного ускорения (стр. 237) следует, что алгебраическое значение a_t касательного ускорения равномерно переменного движения точки равно тангенсу угла β между осью времени и прямолинейным графиком скорости этого движения, умноженному на масштаб μ_v скорости и деленному на масштаб μ_t времени, принятые при построении графика скорости.

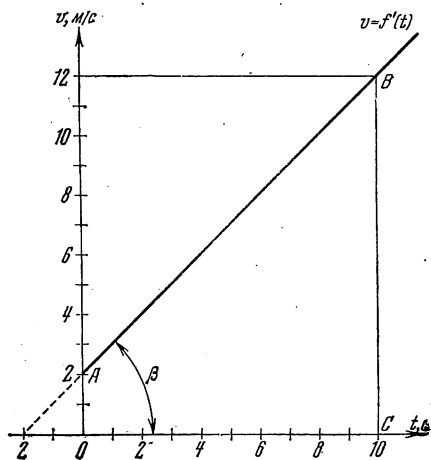


Рис. 163.

В нашем случае $\operatorname{tg} \beta = 12/12 = 1$. Следовательно, ускорение точки:

$$a = a_t = \frac{\mu_v}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta = 1 \cdot \frac{0,2 \text{ м/(с} \cdot \text{мм)}}{0,2 \text{ с/мм}} \cdot 1 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Так как ускорение равномерно переменного движения есть величина постоянная, то графиком касательного ускорения равномерно переменного движения всегда будет прямая, параллельная оси времени. График ускорения $a = \ddot{f}(t)$ для данного случая движения точки изображен на рис. 164.

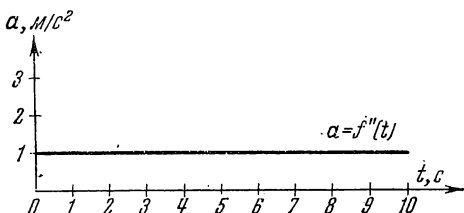


Рис. 164.

Остается определить путь S , пройденный точкой за 10 секунд. Из уравнения движения точки $s = \dot{f}(t)$ определим расстояние точки от начала отсчета в начальный момент и при $t = 10$ с. При $t = 0$ $s = s_0 = 40$ м, при $t = 10$ с $s = 40 + 2 \cdot 10 + 0,5 \cdot 10^2 = 110$ м. Тогда пройденный точкой путь $S = s - s_0 = 110 - 40 = 70$ м.

Графически этот путь определяется либо по графику расстояния, либо по графику скорости. Для определения пройденного пути по графику расстояния измеряем на графике (рис. 162) ординату, соответствующую $t = 10$ с, и вычитаем из нее начальную ординату. Полученный отрезок

$$55 \text{ мм} - 20 \text{ мм} = 35 \text{ мм}$$

умножаем на масштаб расстояний, имеем

$$35 \text{ мм} \cdot 2 \text{ м/мм} = 70 \text{ м}.$$

Для определения пройденного пути по графику скорости (рис. 163) измеряем площадь $OABC$, равную

$$\frac{OA + BC}{2} \cdot OC = \frac{10 + 60}{2} \cdot 50 = 1750 \text{ мм}^2.$$

По формуле (84)

$$S = \mu_v \mu_t \cdot \text{пл } OABC = 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}} \cdot 0,2 \frac{\text{с}}{\text{мм}} \cdot 1750 \text{ мм}^2 = 70 \text{ м}.$$

ГЛАВА XIV

ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 64. Поступательное движение

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором всякая прямая, неизменно связанная с этим телом, движется, оставаясь параллельной своему начальному положению.

Примерами поступательного движения тела могут служить: движение кузова автомашины, движущейся по прямолинейному пути, движение поршня двигателя и т. д. Неправильно, однако, думать, что при поступательном движении тела траектории его точек должны быть непременно прямыми линиями. Так, например, спарник

AB (рис. 165), соединяющий кривошипы O_1A и O_2B двух соседних колес паровоза, совершает поступательное движение, хотя его точки и будут двигаться по окружностям. В самом деле, при вращении кривошипов O_1A и O_2B вокруг их осей O_1 и O_2 положение спарника AB

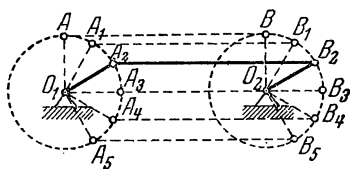


Рис. 165.

будет изменяться. Но при равенстве длин кривошипов и при длине спарника, равной расстоянию между осями O_1O_2 , четырехугольник O_1ABO_2 будет всегда оставаться параллелограммом, следовательно, спарник AB будет всегда параллельным основанию O_1O_2 , т. е. движется, оставаясь параллельным своему начальному положению. В то же время точки A и B спарника, а следовательно,

и все остальные его точки движутся по окружностям, радиус которых равен длине кривошипа.

Траекториями точек тела при его поступательном движении могут быть какие угодно кривые: прямолинейное движение тела есть только частный случай поступательного движения.

Заметим также, что термин «поступательное движение» применим только к движению тела, но не к движению одной точки. Понятие «движется, оставаясь параллельной своему начальному положению» никак не применимо к точке, не имеющей размеров.

Теорема. При поступательном движении твердого тела все его точки движутся по одинаковым (при наложении совпадающим) траекториям и имеют в каждый данный момент равные скорости и равные ускорения.

Доказательство. Пусть какое-либо тело, двигаясь поступательно, за промежуток времени t перемещается из положения I в положение II (рис. 166).

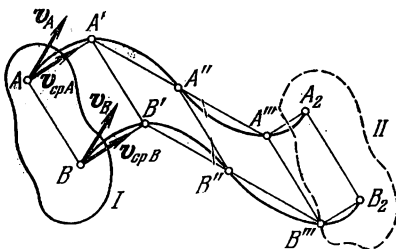


Рис. 166.

Разобьем данный промежуток времени на большое число n малых промежутков времени Δt и отметим положение произвольной прямой AB , неизменно связанной с телом, в конце каждого из этих промежутков.

Отрезки $AB, A'B', A''B'', \dots, A_2B_2$ представляют собой последовательные положения одного и того же отрезка AB , движущегося вместе с твердым телом. Следовательно, $AB = A'B' = A''B'' = \dots = A_2B_2$. Кроме того, на основании определения поступательного движения тела эти отрезки параллельны между собой:

$$AB \parallel A'B', \quad A'B' \parallel A''B'' \quad \text{и т. д.}$$

Поэтому, если соединим между собой прямолинейными отрезками точки A, A', A'', \dots, A_2 и точки B, B', B'', \dots, B_2 , то отрезки $AA', A'A'', \dots, A''A_2$ будут соответственно равны и параллельны отрезкам $BB', B'B'', \dots, B''B_2$, как отрезки, заключенные между равными и параллельными отрезками. Отсюда следует, что лома-

ные $AA'A'' \dots A_2$ и $BB'B'' \dots B_2$, соединяющие различные положения точек A и B , имеют равные и параллельные стороны и потому могут быть совмещены друг с другом. Это будет справедливо при любом числе n промежутков, т. е. при любом числе отмеченных положений точек A и B . В пределе при $n \rightarrow \infty$ и $\Delta t \rightarrow 0$ ломаные $AA'A'' \dots A_2$ и $BB'B'' \dots B_2$ превратятся в траектории точек A и B тела. Эти траектории, очевидно, также могут быть совмещены друг с другом и потому представляют собой одинаковые кривые.

Докажем теперь, что точки A и B имеют в каждый данный момент равные скорости и ускорения.

Средней скоростью точки A при переходе ее в положение A' за промежуток времени Δt будет вектор $\mathbf{v}_{\text{ср } A} = \overrightarrow{AA'}/\Delta t$. Этот вектор (стр. 207) имеет направление вектора $\overrightarrow{AA'}$ перемещения точки и равен по модулю отношению длины отрезка AA' к промежутку времени Δt .

Средней же скоростью точки B при переходе ее в положение B' за тот же промежуток времени Δt будет вектор $\mathbf{v}_{\text{ср } B} = \overrightarrow{BB'}/\Delta t$, имеющий направление вектора $\overrightarrow{BB'}$ и равный по модулю отношению длины отрезка BB' к тому же самому промежутку времени Δt .

Но, как доказано выше, отрезки $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$ равны и параллельны. Следовательно, $\mathbf{v}_{\text{ср } A} = \mathbf{v}_{\text{ср } B}$.

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, будем иметь

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{\text{ср } A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{\text{ср } B}.$$

А так как скорость точки в каждый момент равна пределу ее средней скорости, то получаем

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B.$$

Так как вектор \mathbf{v}_A скорости точки A равен вектору \mathbf{v}_B скорости точки B в каждый данный момент времени, то, очевидно, и вектор $\Delta \mathbf{v}_A$ приращения скорости точки A за какой-либо промежуток времени Δt равен вектору $\Delta \mathbf{v}_B$ приращения скорости точки B за тот же промежуток времени:

$$\Delta \mathbf{v}_A = \Delta \mathbf{v}_B.$$

Отсюда следует, что равны между собой и векторы средних за данный промежуток Δt времени ускорений

рассматриваемых точек:

$$\frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \frac{\Delta v_B}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, будем иметь

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_B}{\Delta t}.$$

Но каждая часть последнего равенства выражает собой [формула (69)] не что иное, как ускорение соответствующей точки в данный момент времени. Следовательно,

$$a_A = a_B.$$

Мы доказали, что точки A и B движутся одинаково. Эти точки тела были выбраны произвольно, а потому сделанные выводы могут быть распространены и на все другие точки тела, движущегося поступательно.

Из доказанной теоремы следует, что *поступательное движение тела вполне определяется движением какой-либо одной его точки*. Таким образом, задача изучения поступательного движения твердого тела сводится к уже рассмотренным ранее задачам кинематики точки.

Скорость и ускорение, общие для всех точек поступательно движущегося тела, называются скоростью и ускорением этого тела.

Заметим, что говорить о скорости и ускорении тела можно только в случае его поступательного движения. Во всех остальных случаях различные точки тела имеют различные скорости и различные ускорения.

§ 65. Вращательное движение

Вращательным движением называется такое движение твердого тела, при котором все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения, остаются неподвижными¹⁾.

¹⁾ Вращающееся тело может и не иметь своих точек на геометрической оси вращения, т. е. не иметь само неподвижных точек. Например, колесо, надетое на материальную ось, или человек, сидящий на карусели. Но если точки, расположенные на геометрической оси вращения, неизменно присоединить к вращающемуся телу, то они будут оставаться неподвижными при вращении тела.

Для того чтобы осуществить вращательное движение тела, достаточно закрепить неподвижно две какие-нибудь его точки (например, при помощи подшипника A и подпятника B , рис. 167), тогда прямая, проходящая через эти две точки, будет осью вращения тела.

При вращательном движении тела различные его точки движутся, вообще говоря, по-разному. Однако и для вращательного движения можно отыскать такие кинематические характеристики, которые были бы общими для всех точек тела.

Пусть какое-нибудь твердое тело (изображенное для простоты на рис. 167 в виде цилиндра) вращается вокруг неподвижной оси z . Проведем через ось вращения z неподвижную полуплоскость P и полуплоскость Q , неизменно связанную с вращающимся телом.

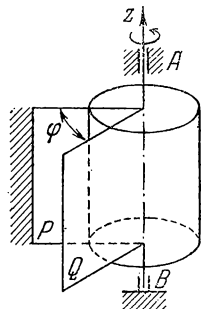


Рис. 167.

Угол φ между двумя полуплоскостями, проходящими через ось вращения тела, неподвижную и неизменно связанную с вращающимся телом, называется углом поворота тела.

Установим на оси вращения z положительное направление и условимся считать угол поворота тела положительным, когда он отсчитывается от неподвижной плоскости P в сторону, противоположную вращению часовой стрелки, если смотреть на него с положительного конца оси вращения. Заданием величины и знака угла поворота φ вполне определяется положение полуплоскости Q и неизменно связанного с ней вращающегося тела.

При вращении тела вокруг оси z угол поворота тела изменяется с течением времени, следовательно, он является некоторой функцией времени:

$$\varphi = f(t). \quad (91)$$

Уравнение (91), устанавливающее зависимость между углом поворота тела и временем его движения, называется уравнением вращательного движения тела.

Этим уравнением вполне определяется вращательное движение тела, так как, зная конкретную зависимость $\varphi = f(t)$, мы всегда можем для каждого момента времени t найти соответствующее ему значение угла φ

поворота тела и тем самым определить положение тела в этот момент.

Угол поворота в механике обычно измеряют в безразмерных единицах, т. е. в радианах. Иногда в практических задачах угол поворота выражают числом оборотов $\varphi_{об}$ тела. Принимая во внимание, что один оборот тела, т. е. его поворот на 360° , соответствует 2π радиан, мы получаем зависимость между углом φ поворота тела в радианах и числом $\varphi_{об}$ его оборотов:

$$\varphi = 2\pi\varphi_{об}. \quad (92)$$

Пусть в момент t положение тела определяется углом поворота φ , а в момент $t + \Delta t$ — углом поворота $\varphi + \Delta\varphi$.

Отношение приращения $\Delta\varphi$ угла поворота тела за некоторый промежуток времени Δt к величине этого промежутка времени называется средней угловой скоростью тела за промежуток времени Δt . Обозначая среднюю угловую скорость символом $\omega_{ср}$, будем иметь

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (93)$$

Средняя угловая скорость тела, вообще говоря, зависит от величины промежутка времени и не дает представления о быстроте вращения тела в данный момент. Но чем меньше мы будем брать промежуток времени Δt , начинающийся в данный момент времени t , тем точнее будет средняя угловая скорость характеризовать быстроту вращения в данный момент времени. Поэтому *истинной угловой скоростью или просто угловой скоростью тела в данный момент времени называется предел, к которому стремится средняя угловая скорость тела за промежуток времени Δt , начинающийся в данный момент t , при $\Delta t \rightarrow 0$.*

Обозначая угловую скорость тела в данный момент буквой ω , будем иметь

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{ср} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Так как угол φ поворота тела есть функция времени: $\varphi = f(t)$, то $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ есть производная этой функции.

Таким образом, получаем, что *угловая скорость тела в данный момент равна производной от угла поворота тела по времени*:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (94)$$

Значение угловой скорости тела для данного момента времени может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, в какую сторону вращается тело. Когда тело вращается против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения, то $\Delta\varphi > 0$, $d\varphi/dt > 0$ и угловая скорость ω положительна. Если тело вращается по часовой стрелке, то угловая скорость отрицательна. Следовательно, знак угловой скорости указывает, в какую сторону в данный момент вращается тело.

Исходя из определения угловой скорости, можно найти и ее размерность:

$$[\omega] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\Delta\varphi]}{[\Delta t]} = \frac{[\text{угол}]}{[\text{время}]}.$$

Так как угол в механике измеряется в радианах, а время — в секундах, то *угловая скорость измеряется в радианах в секунду*¹⁾.

Единица угловой скорости обозначается при этом так: рад/с.

На практике часто угловую скорость тела выражают не в радианах в секунду, а так называемой частотой вращения, выраженной числом оборотов в минуту, обозначая ее буквой n . Нетрудно найти зависимость между ω и n .

Так как один оборот тела соответствует его повороту на угол в 2π радиан, то

$$\omega = \frac{2\pi n \text{ рад}}{60 \text{ с}} = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с}.$$

Таким образом, получаем важную для практики зависимость между угловой скоростью тела ω в радианах в секунду и его угловой скоростью n в оборотах в минуту:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (95)$$

¹⁾ Измеряя углы в радианах, т. е. отношением дуги, заключенной между сторонами угла, к радиусу этой дуги, мы выражаем углы безразмерными числами.

Нужно помнить, что в этой формуле всегда ω выражается в рад/с, а n — об/мин.

При приближенных подсчетах можно принять $\pi/30 \approx 0,1$, тогда $\omega \approx 0,1n$.

Если тело вращается неравномерно, т. е. если приращения угла φ поворота тела за равные промежутки времени не равны, то его угловая скорость ω изменяется с течением времени и будет являться, следовательно, также некоторой функцией времени:

$$\omega = f'(t).$$

Величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости тела, называется его угловым ускорением.

Пусть в момент времени t тело имело угловую скорость ω , а в момент $t + \Delta t$ — угловую скорость $\omega + \Delta\omega$.

Отношение приращения $\Delta\omega$ угловой скорости тела за некоторый промежуток времени Δt к этому промежутку времени называется средним угловым ускорением тела за промежуток времени Δt .

Обозначая среднее угловое ускорение тела через $\varepsilon_{\text{ср}}$ ¹⁾, будем иметь

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (96)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ среднее угловое ускорение приближается к пределу, называемому истинным или обычно просто угловым ускорением тела в данный момент времени.

Предел, к которому стремится среднее угловое ускорение тела за промежуток времени Δt , начинающийся в данный момент t , при $\Delta t \rightarrow 0$, называется угловым ускорением тела в данный момент.

Обозначая угловое ускорение тела в данный момент буквой ε , будем иметь

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Но так как угловая скорость ω тела есть некоторая функция времени: $\omega = f'(t)$, то $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ есть производная этой функции. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f''(t). \quad (97)$$

¹⁾ ε — греческая буква «эпсилон».

Угловое ускорение тела в данный момент равно первой производной от угловой скорости тела по времени или второй производной от угла поворота тела по времени.

При ускоренном вращении тела приращение $\Delta\omega$ его угловой скорости, а следовательно и угловое ускорение ϵ , является положительным, при замедленном же вращении, наоборот, — отрицательным. Отсюда следует, что *если знак углового ускорения тела совпадает со знаком его угловой скорости, то тело вращается ускоренно, если же их знаки различны, то тело вращается замедленно.*

Размерность углового ускорения:

$$[\epsilon] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\Delta\omega]}{[\Delta t]} = \frac{[\text{угловая скорость}]}{[\text{время}]}$$

Так как угловая скорость измеряется в радианах в секунду, то угловое ускорение измеряется в радианах в секунду, деленных на секунду, т. е. в радианах в секунду за секунду.

Единица углового ускорения обозначается так: рад/с².

Задача 71. Вращение диска вокруг неподвижной оси определяется уравнением $\varphi = 180t - 15t^2$ (φ — в радианах, t — в секундах). Найти угловую скорость ω и угловое ускорение ϵ диска в моменты времени $t = 0$, $t = 6$ с и $t = 7$ с.

Решение. Угловую скорость диска находим по формуле (94):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} (180t - 15t^2) = (180 - 30t) \text{ рад/с,}$$

при $t = 0$ $\omega = 180$ рад/с; при $t = 6$ с $\omega = 180 - 30 \cdot 6 = 0$; при $t = 7$ с $\omega = 180 - 30 \cdot 7 = -30$ рад/с.

Угловое ускорение диска находим по формуле (97):

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} (180 - 30t) = -30 \text{ рад/с}^2 = \text{const.}$$

В начальный момент (при $t = 0$) угловая скорость и угловое ускорение диска имеют разные знаки, следовательно, диск вращается замедленно. При $t = 6$ с угловая скорость диска обращается в нуль, после чего он начинает вращаться ускоренно (угловая скорость и угловое ускорение имеют одинаковые знаки).

§ 66. Траектории, скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела

При вращении тела вокруг неподвижной оси все его точки описывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения z (рис. 168). Центры этих окружностей лежат на оси вращения, и, следова-

тельно, радиус каждой из них равен расстоянию соответствующей точки тела от оси вращения.

Очевидно, что радиусы всех данных окружностей поворачиваются за один и тот же промежуток времени Δt на один и тот же угол $\Delta\varphi$, равный приращению угла φ поворота тела за этот промежуток времени, однако точки, лежащие на разных расстояниях от оси вращения (точки M_1 и M_2 на рис. 168), опишут при этом дуги различной длины.

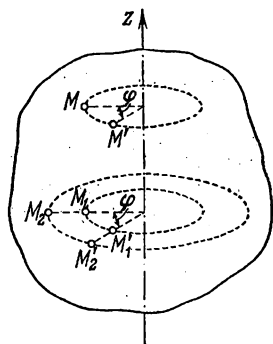


Рис. 168.

Зная угловую скорость ω тела и расстояние r какой-нибудь точки M тела от оси вращения, можно найти и скорость ¹⁾ v этой точки.

Пусть за промежуток времени Δt , соответствующий приращению $\Delta\varphi$ угла поворота тела, данная точка перемещается из положения M в положение M' (рис. 168). Длина дуги MM' , пройденной точкой M по ее траектории, равна абсолютной величине приращения Δs расстояния s точки M от той точки данной траектории, которая принята за начало отсчета.

Численное же значение скорости точки равно, как известно, производной по времени от расстояния s данной точки от начала отсчета:

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Но длина дуги окружности равна ее радиусу, умноженному на соответствующий центральный угол в радианах, т. е. в данном случае имеем $\Delta s = r \Delta\varphi$.

Подставляя значение Δs в предыдущее равенство, получаем

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta\varphi}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega.$$

¹⁾ Скорость точки вращающегося тела, характеризующую своим модулем быстроту ее движения по дуге траектории (измеряемой в линейных единицах), иногда называют *линейной скоростью* в отличие от угловой скорости тела, характеризующей быстроту изменения угла его поворота.

Численное значение скорости точки вращающегося тела равно произведению угловой скорости тела на расстояния данной точки от оси вращения:

$$v = r\omega. \quad (98)$$

Направлен вектор v скорости точки по касательной к траектории точки, следовательно, перпендикулярно к ее радиусу вращения, в сторону движения точки. Из формулы (98) следует, что *скорости точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям этих точек от оси вращения.*

Так как в формуле $\Delta s = r \Delta \varphi$ приращение угла $\Delta \varphi$ должно быть обязательно выражено в радианах, то и угловая скорость ω в формуле (98), должна обязательно выражаться в рад/с, рад/мин и т. д., но не в об/с или в об/мин. Только в этом случае будет получаться правильная размерность скорости v . На практике часто приходится находить скорость точек, лежащих на боковой поверхности вращающегося цилиндрического тела (вала, шкива и т. п.), которая *называется* иногда в этих случаях *окружной скоростью*. Если при этом угловая скорость тела будет выражена в об/мин, то окружная скорость

$$v = r\omega = \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi nd}{60}, \quad (99)$$

где d — диаметр вращающегося цилиндрического тела, n — число оборотов тела в минуту.

При любом вращательном движении тела скорость v его точек непременно изменяется (только по направлению при равномерном вращательном движении или по направлению и по модулю при неравномерном вращательном движении), следовательно, точки вращающегося тела всегда движутся с некоторым ускорением.

Ускорение точки вращающегося тела, как и ускорение всякого криволинейного движения, может быть разложено на касательное ускорение a_t , часто называемое в этом случае *вращательным* ускорением, и нормальное ускорение a_n , называемое в этом случае *центростремительным* ускорением.

Полагая в формулах (70) и (72) для касательного и нормального ускорения точки $v = r\omega$ и радиус кривизны ρ траектории равным радиусу окружности, описываемой точкой, т. е. расстоянию r точки от оси

вращения, будем иметь

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r\omega = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon,$$

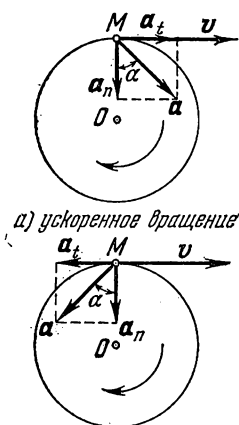
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2.$$

Численное значение вращательного ускорения точки (т. е. касательного ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси) равно произведению углового ускорения тела на расстояние данной точки от оси вращения:

$$a_t = r\varepsilon. \quad (100)$$

Численное значение центростремительного ускорения точки (т. е. нормального ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси) равно квадрату угловой скорости тела, умноженному на расстояние данной точки от оси вращения:

$$a_n = r\omega^2. \quad (101)$$



а) ускоренное вращение

б) замедленное вращение

Рис. 169.

Направление вектора вращательного ускорения точки совпадает с направлением вектора ее скорости при ускоренном вращении тела (рис. 169, а) и противоположно скорости в случае замедленного вращения (рис. 169, б).

Вектор же центростремительного ускорения точки всегда направлен по радиусу окружности, описываемой точкой, к центру этой окружности¹⁾.

Зная вращательную и центростремительную составляющие ускорения a точки, всегда можно (при необходимости) найти величину и направление этого ускорения, являющегося диагональю прямоугольника, построенного на векторах a_t и a_n (рис. 169).

Модуль этого ускорения

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{r^2\varepsilon^2 + r^2\omega^4} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

¹⁾ Отсюда это ускорение и получило такое название.

Острый угол α между направлением вектора ускорения a точки и направлением радиуса (нормали к траектории) найдется из формулы

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Для получения правильной размерности ускорений a_t , a_n и a в формулы (100), (101) нужно подставлять ε в радианах в секунду за секунду и ω в радианах в секунду.

Задача 72. Вентилятор делает 4200 об/мин. Как велик может быть его диаметр, если окружная скорость вентилятора не должна превышать 88 м/с?

Решение. Из формулы (99) $v = \frac{\pi dn}{60}$ сразу получаем искомый ответ:

$$d = \frac{60v}{\pi n} \leq \frac{60 \cdot 88}{3,14 \cdot 4200}, \quad \text{или} \quad d \leq 0,4 \text{ м.}$$

Задача 73. Шкив диаметром 600 мм вращается вокруг своей оси. Скорость точек на его ободе равна в данный момент 1,5 м/с. Определить угловую скорость шкива в оборотах в минуту.

Решение. Из формулы (98) $v = r\omega$ вычисляем сначала угловую скорость ω шкива в радианах в секунду:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1,5}{0,3} = 5 \text{ рад/с.}$$

Пользуясь зависимостью (95) $\omega = \frac{\pi n}{30}$, находим затем угловую скорость n шкива в оборотах в минуту:

$$n = \frac{30v}{\pi} = \frac{30 \cdot 5}{3,14} \approx 47,8 \text{ об/мин.}$$

Задача 74. Маховик имеет в данный момент угловую скорость $\omega = 2\pi$ рад/с и угловое ускорение $\varepsilon = -3$ рад/с². Найти скорость, вращательное, центростремительное и полное ускорение точки M маховика, находящейся на расстоянии 0,8 м от оси вращения.

Решение. Скорость точки $v = r\omega = 0,8 \cdot 2\pi = 1,6\pi \approx 5$ м/с. Вращательное ускорение точки $a_t = r\varepsilon = 0,8 \cdot 3 = 2,4$ м/с². Так как знаки ω и ε различны, то маховик вращается замедленно, и потому ускорение a_t точки направлено в сторону, противоположную ее скорости (рис. 170).

Центростремительное ускорение точки

$$a_n = r\omega^2 = 0,8 \cdot (2\pi)^2 = 3,2\pi^2 \approx 31,5 \text{ м/с}^2.$$

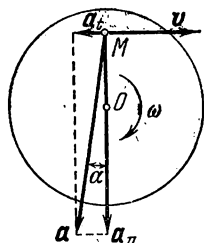


Рис. 170.

Полное ускорение точки

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{2,4^2 + 31,5^2} \approx 31,6 \text{ м/с}^2,$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{2,4}{31,5} \approx 0,08.$$

§ 67. Частные случаи вращательного движения твёрдого тела

1. Равномерное вращение

Равномерным вращением тела называется вращательное движение тела с постоянной угловой скоростью.

В этом случае $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$ Отсюда следует

$$d\varphi = \omega dt$$

и

$$\varphi = \int \omega dt = \omega t + C.$$

Произвольную постоянную интегрирования, как всегда, находим из начальных условий. Если при $t = 0$ угол поворота тела $\varphi = \varphi_0$, то, подставляя эти значения переменных t и φ в предыдущее равенство, находим $C = \varphi_0$. Следовательно,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (102)$$

Уравнение (102) называется уравнением *равномерного вращения тела*. Оно позволяет определить положение равномерно вращающегося тела в любой момент времени. Разность $\varphi - \varphi_0$ представляет, очевидно, угол поворота тела за время t .

Из формулы (102) следует

$$\varphi - \varphi_0 = \omega t.$$

Таким образом, при равномерном вращении тела приращение угла поворота тела за некоторое время равно произведению его угловой скорости на это время.

Отсюда имеем

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}. \quad (103)$$

Угловая скорость равномерного вращения тела вокруг неподвижной оси равна отношению приращения угла поворота тела за данный промежуток времени к величине этого промежутка времени.

Угловое ускорение тела $\epsilon = d\omega/dt$ при равномерном его вращении, очевидно, равно нулю. Отсюда следует, что при равномерном вращении тела вращательное ускорение любой его точки $a_t = r\epsilon$ также всегда равно нулю. Таким образом, полное ускорение точки равномерно вращающегося тела состоит только из одного центростремительного ускорения

$$a = a_n = r\omega^2$$

и направлено, конечно, по радиусу к центру окружности, описываемой данной точкой.

2. Равномерно переменное вращение

Равномерно переменным (равномерно ускоренным или равномерно замедленным) вращением тела называется такое его вращательное движение, при котором за равные, произвольно взятые промежутки времени угловая скорость тела меняется на одну и ту же величину.

Очевидно, что при равномерно переменном вращении угловое ускорение тела, т. е. величина, характеризующая быстроту изменения его угловой скорости, постоянно:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \text{const.}$$

Отсюда следует $d\omega = \epsilon dt$ и

$$\omega = \int \epsilon dt = \epsilon t + C_1.$$

Обозначая начальную угловую скорость тела (т. е. его угловую скорость в момент $t = 0$) через ω_0 и подставляя начальные значения переменных t и ω в предыдущее равенство, находим $C_1 = \omega_0$. Следовательно,

$$\omega = \omega_0 + \epsilon t. \quad (104)$$

Из данного уравнения, называемого *формулой угловой скорости равномерно переменного вращения*, находим

$$\epsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}.$$

Угловое ускорение равномерно переменного вращения равно отношению приращения угловой скорости

тела за данный промежуток времени к величине этого промежутка времени. Заменяя в уравнении (104) ω его значением $d\varphi/dt$, будем иметь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t$$

и

$$d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt.$$

Интегрируя последнее равенство по t , получим

$$\varphi = \int \omega_0 dt + \int \varepsilon t dt = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_2,$$

Если при $t = 0$ угол поворота тела $\varphi = \varphi_0$, то, подставляя эти значения переменных t и φ в предыдущее равенство, находим значение произвольной постоянной $C_2 = \varphi_0$. Следовательно,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (105)$$

Уравнение (105) называется уравнением *равномерно переменного вращения тела*.

Очевидно, что при равномерно переменном вращении тела все его точки совершают равномерно переменное движение по соответствующим окружностям, а потому к движению точек равномерно переменного вращающегося тела могут быть применены формулы § 63.

С равномерно переменным вращением мы обычно встречаемся в задачах, связанных с пуском в ход и остановкой машины. Угловое ускорение тела, как будет доказано в динамике, есть величина постоянная в случае постоянной величины приложенного к нему вращающего момента.

Полезно обратить внимание на существующую аналогию между помещенными ниже в таблице формулами кинематики точки и формулами для вращательного движения тела. Нетрудно заметить, что для перехода от первых формул ко вторым требуется лишь заменить в них расстояние s точки углом поворота φ тела, скорость v точки — угловой скоростью ω тела и касательное ускорение a_t точки, характеризующее быстроту изменения модуля скорости точки, — угловым ускорением ε тела, характеризующим быстроту изменения величины угловой скорости тела.

Кинематические характеристики и характер движения		Движение точки		Вращательное движение тела	
Уравнение движения	Общая формула	$s = f(t)$		$\varphi = f(t)$	
	Равномерное движение	$s = s_0 + vt$		$\varphi = \varphi_0 + \omega t$	
	Равномерно переменное движение	$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}$		$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$	
Скорость	Общая формула	Линейная	$v = \frac{ds}{dt}$	Угловая	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
	Равномерное движение		$v = \frac{s - s_0}{t}$		$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}$
	Равномерно переменное движение		$v = v_0 + a_t t$		$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
	Размерность		$\frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]}$		$\frac{[\text{угол}]}{[\text{время}]}$
Ускорение	Общая формула	Касательное	$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$	Угловое	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$
	Равномерно переменное движение		$a_t = \frac{v - v_0}{t}$		$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}$
	Размерность		$\frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]^2}$		$\frac{[\text{угол}]}{[\text{время}]^2}$

Задача 75. Шкив радиусом 0,3 м, вращаясь равномерно, делает 1200 об/мин. Найти его угловую скорость ω в радианах в секунду, а также скорость и ускорение точки, лежащей на окружности шкива.

Решение. $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 1200}{30} = 125,6 \text{ рад/с}$, $v = r\omega = 0,3 \cdot 125,6 \approx 37,7 \text{ м/с}$. Так как при равномерном вращении тела вращательное ускорение $a_t = r\varepsilon = 0$, то полное ускорение $a = a_n = r\omega^2 = 0,3 \cdot 125,6^2 \approx 4733 \text{ м/с}^2$ и направлено по радиусу к центру шкива.

Задача 76. Первоначально покоившееся тело, вращаясь равномерно ускоренно, приобрело в течение 10 с угловую скорость, равную 30 рад/с. Сколько оборотов сделало тело за эти 10 с?

Решение. По условию задачи начальная угловая скорость тела $\omega_0 = 0$. Так как вращение тела равномерно переменное, то его угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{30}{10} = 3 \text{ рад/с}^2$. Приращение угла

поворота тела за 10 с равно $\varphi = \omega t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{3 \cdot 10^2}{2} = 150 \text{ рад}$.

Зная угол φ поворота, определяем по формуле (92) $\varphi = 2\pi\varphi_{об}$ соответствующее ему число $\varphi_{об}$ оборотов тела:

$$\varphi_{об} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{150}{2 \cdot 3,14} \approx 23,9.$$

Задача 77. Маховик, имевший угловую скорость в 600 об/мин, был предоставлен самому себе и вследствие трения в подшипниках остановился, сделав 200 оборотов. Определить угловое ускорение колеса, считая его постоянным.

Решение. Определяем угол поворота маховика, соответствующий сделанным до остановки 200 оборотам:

$$\varphi = 2\pi\varphi_{об} = 2\pi \cdot 200 = 400\pi.$$

Начальная угловая скорость маховика

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 600}{30} = 20\pi \text{ рад/с.}$$

Конечная угловая скорость маховика

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = 0.$$

При равномерно переменном вращении тела угол его поворота определяется формулой

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Решая эти два уравнения совместно, находим $\varepsilon = -\frac{\omega_0^2}{2\varphi} = -\frac{(20\pi)^2}{2 \cdot 400\pi} = -0,5\pi = -1,57 \text{ рад/с}^2$. Отрицательное значение ε говорит о замедленном вращении маховика.

Задача 78. На вал радиуса $r = 10$ см намотана веревка, свободный конец которой тянут в горизонтальном направлении (рис. 171), так что он движется согласно уравнению $s = 100t^2$ (s — в сантиметрах, t — в секундах), где s — расстояние от неподвижной вертикали AB . Определить угловую скорость и угловое ускорение вала, а также величину полного ускорения точки на поверхности вала в момент t .

Решение. Скорость веревки

$$v = \frac{ds}{dt} = 200t \text{ см/с.}$$

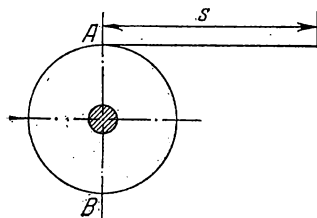


Рис. 171.

Так как вал приводится в движение сматываемой с него веревкой, то скорость точки на поверхности вала равна скорости веревки. Тогда угловая скорость вала

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{200t}{10} = 20t \text{ рад/с.}$$

Угловое ускорение вала

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 20 \text{ рад/с}^2.$$

Величину полного ускорения точки на поверхности вала определяем по формуле

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 10 \sqrt{20^2 + 20^4} = \\ = 200 \sqrt{1 + 400} \text{ см/с}^2,$$

§ 68. Передачи вращательного движения

Передача вращательного движения от одной машины к другой или внутри машины от одного ее вала к другому осуществляется разнообразными механизмами, носящими название *передач*.

Передачи могут быть разделены на передачи гибкой связью (ременную, канатную, цепную) и передачи, осуществляемые путем непосредственного соприкосновения (фрикционную, зубчатую и др.).

Валы и закрепленные на них шкивы и колеса называются *ведущими*, когда они передают движение, и *ведомыми*, когда они его воспринимают.

Отношение угловых скоростей двух валов (шкивов или колес) называется передаточным отношением.

Так как угловая скорость ω тела в рад/с пропорциональна [(формула (95)] его угловой скорости n в об/мин, то, обозначая передаточное отношение буквой i с соответствующим двойным индексом, будем иметь

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{или:} \quad i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (106)$$

Передаточное отношение, вычисленное в направлении передачи движения, называется передаточным числом. Следовательно, *передаточным числом называется отношение угловой скорости ведущего вала к угловой скорости ведомого вала.*

Рассмотрим, как определяются передаточные отношения некоторых простейших передач.

1. Ременные передачи

Ременная передача между двумя параллельными валами может быть *открытой* (рис. 172, а) или *перекрестной* (рис. 172, б).

Так как ремень надевается на шкивы с натяжением, то, благодаря трению между шкивами и ремнем, при вращении ведущего шкива ремень приходит в движение и заставляет вращаться ведомый шкив.

В открытой передаче направление вращения шкивов, охваченных одним бесконечным ремнем, одинаково. В перекрестной передаче направление вращения ведомого шкива противоположно направлению вращения

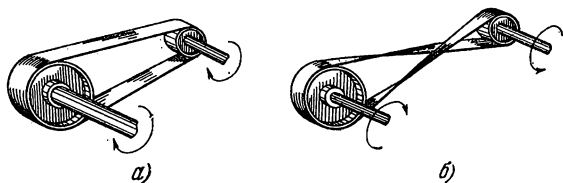


Рис. 172.

ведущего. Если не учитывать скольжения ремня, то окружные скорости шкивов $v_1 = \omega_1 R_1$ и $v_2 = \omega_2 R_2$ будут равны между собой. Отсюда $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ и

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{D_2}{D_1}. \quad (107)$$

Передаточное отношение ременной передачи равно обратному отношению радиусов (или диаметров) шкивов.

Практически, вследствие неизбежности упругого скольжения¹⁾ ремня при работе ременной передачи под нагрузкой, окружная скорость v_2 ведомого шкива будет на 1—3% меньше окружной скорости v_1 ведущего, и для сохранения требуемой угловой скорости ведомого шкива несколько уменьшают его диаметр.

2. Фрикционные передачи

Фрикционными²⁾ называются устройства, передача вращательного движения в которых осуществляется прижатыми друг к другу колесами.

¹⁾ Это является одним из существенных недостатков ременной передачи.

²⁾ От латинского слова «frictio» — трение.

При достаточно большой силе трения между колесами ведущее колесо, вращаясь, приводит во вращение ведомое.

На рис. 173, *а* изображена фрикционная передача между параллельными валами, осуществляемая цилиндрическими колесами, а на рис. 173, *б* — передача между пересекающимися валами, осуществляемая коническими колесами.

Передаточное отношение фрикционной передачи определяется из того условия, что скорости соприкасающихся точек на поверхностях катков должны быть равны между собой (если, конечно, пренебречь проскальзыванием).

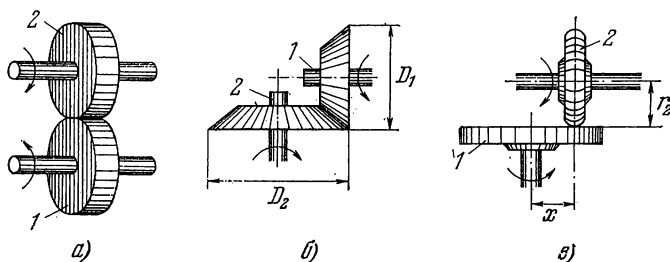


Рис. 173.

Отсюда получается, что *передаточное отношение цилиндрической фрикционной передачи равно обратному отношению радиусов (или диаметров) колес:*

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{D_2}{D_1}. \quad (108)$$

Направления вращения ведущего и ведомого колес, очевидно, (рис. 173, *а*) противоположны друг другу.

Условившись для конической передачи соприкасающиеся точки брать на окружностях больших оснований конусов, найдем, что *передаточное число конической фрикционной передачи также равно обратному отношению радиусов (диаметров) окружностей больших оснований конусов.*

Для так называемой лобовой передачи (вариатора) (рис. 173, *в*), позволяющей путем поступательного перемещения колеса 2 вдоль диаметра колеса 1 получить переменное передаточное отношение между ведущим

и ведомым валами, будем иметь

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{x},$$

где x — переменное расстояние средней плоскости колеса 2 от оси колеса 1, r_2 — радиус колеса 2.

3. Зубчатые передачи

Достоинствами фрикционных передач являются простота конструкции и плавность их работы. Существенным недостатком — непостоянство передаточного отношения, вызываемое проскальзыванием фрикционных колес друг относительно друга. Проскальзывание возрастает с увеличением передаваемой колесами нагрузки. Чем больше усилие, передаваемое колесами, тем сильнее, для обеспечения достаточного сцепления между ними, должны прижиматься колеса друг к другу. Последнее же влечет за собой увеличение трения в подшипниках и значительный изгиб валов.

Для устранения этих недостатков на цилиндрических поверхностях колес делаются выступы — зубцы и впадины (рис. 174). Если один или несколько зубцов одного

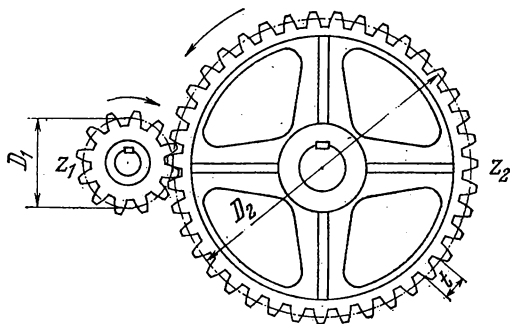


Рис. 174.

колеса входят во впадины другого, то при вращении ведущего колеса его зубцы нажимают на зубцы ведомого и приводят последнее во вращение. Этим обеспечивается постоянство передаточного отношения такой передачи.

Колеса, снабженные зубцами, называются зубчатыми, а передача вращения с помощью зубчатых колес назы-

вается *зубчатой передачей*. Зубчатые передачи являются одним из самых распространенных видов передаточных механизмов.

Зубчатые колеса, изображенные на рис. 174, можно мысленно заменить двумя фрикционными колесами, катящимися друг по другу без скольжения и вращающимися вокруг тех же осей, с теми же угловыми скоростями, что и данные зубчатые колеса. Окружности таких воображаемых фрикционных колес называются *начальными окружностями данных зубчатых колес*.

Следовательно, *передаточное отношение двух находящихся в зацеплении зубчатых колес равно обратному отношению радиусов их начальных окружностей*:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (109)$$

Передаточному отношению зубчатой передачи можно дать и другое, более удобное для практики выражение.

Расстояние между двумя сходственными (рис. 174) точками двух соседних зубцов, измеренное по дуге начальной окружности, называется шагом зацепления.

Отношение шага к числу π называется модулем зацепления:

$$m = \frac{t}{\pi}, \quad (110)$$

где t — шаг и m — модуль зацепления.

Шаг и модуль зацепления всегда измеряются в мм. Модули зубчатых колес стандартизованы.

Для правильности зацепления двух совместно работающих колес необходимо, чтобы их шаги (а следовательно, и модули) были одинаковы. Отсюда получаем следующие выражения для длин начальных окружностей двух находящихся в зацеплении зубчатых колес:

$$\pi D_1 = tz_1 \quad \text{и} \quad \pi D_2 = tz_2,$$

где z_1 и z_2 — числа зубцов соответствующих колес.

Следовательно, диаметры начальных окружностей этих колес

$$D_1 = \frac{t}{\pi} z_1 = mz_1 \quad \text{и} \quad D_2 = \frac{t}{\pi} z_2 = mz_2. \quad (111)$$

Диаметр начальной окружности зубчатого колеса равен произведению его модуля на число зубцов колеса.

Подставляя найденные значения диаметров начальных окружностей колес в формулу (109), получим

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (112)$$

Передаточное отношение двух находящихся в зацеплении зубчатых колес равно обратному отношению их чисел зубцов.

Цилиндрические зубчатые колеса с *наружным* (рис. 175, а) и *внутренним* (рис. 175, б) зацеплением служат для передачи вращения между параллельными валами.

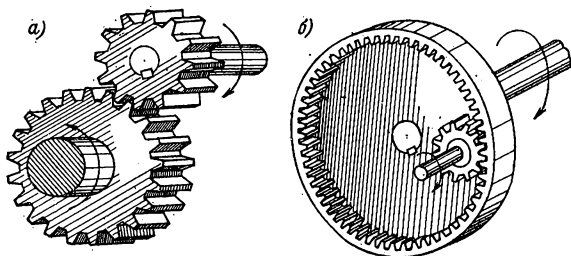


Рис. 175.

В ряде случаев бывает удобно угловые скорости цилиндрических зубчатых колес и передаточное отношение между ними рассматривать как алгебраические величины. Принимая угловую скорость ведущего колеса за положительную величину, будем считать угловую скорость ведомого колеса также положительной, если оно вращается в ту же сторону, что и ведущее колесо, и отрицательной, если оно вращается в противоположную сторону.

Как видно из рис. 175, а, в случае внешнего зацепления направления вращения двух находящихся в зацеплении колес противоположны и потому *передаточное отношение* между ними

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = - \frac{R_2}{R_1} = - \frac{z_2}{z_1}.$$

В случае же *внутреннего зацепления* колес (рис. 175, б) оба колеса вращаются в одну сторону и

передаточное отношение между ними

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Для передачи вращения между пересекающимися валами служат конические зубчатые колеса (рис. 176).

Передаточное отношение двух находящихся в зацеплении конических колес определяется, по абсолютному значению, так же, как и для цилиндрических колес, по формуле (112).

Так как коническая передача является не плоским, а пространственным механизмом, то угловые скорости конических колес уже нельзя рассматривать как алгебраические величины.

Иногда для преобразования вращательного движения в поступательное применяется зубчатое зацепление, называемое *реечным*. Такая передача часто применяется в металлорежущих станках, например, для сообщения движения столу продольно-строгального станка. В нижней части стола закреплена зубчатая рейка *A* (рис. 177), находящаяся в непрерывном зацеплении с зубчатым колесом *B*. Колесо, получая вращение от привода станка, приводит в поступательное движение рейку, а с ней и стол. В зависимости от направления вращения привода стол станка получает прямой (рабочий) или обратный (холостой) ход.

Скорость поступательного движения рейки, очевидно, равна скорости точки, лежащей на начальной окружности зубчатого колеса: $v = \omega R_n$, где ω — угловая скорость колеса и R_n — радиус ее начальной окружности, который может быть вычислен по формуле (111).

4. Многоступенчатая передача

Многоступенчатой передачей называется механизм, состоящий из ряда соединенных между собой простых передач.

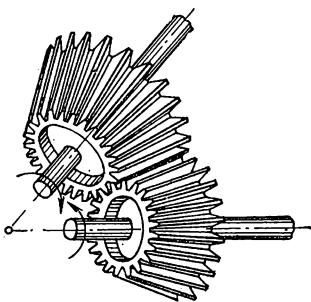


Рис. 176.

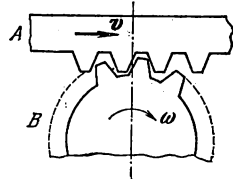


Рис. 177.

На рис. 178 изображена в качестве примера схема многоступенчатой передачи от вала I к валу V, состоящей из ременной передачи, двух пар цилиндрических зубчатых колес и одной пары конических зубчатых колес.

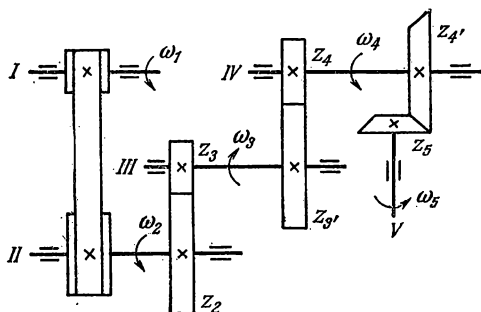


Рис. 178.

Шкивы и колеса жестко закреплены на соответствующих валах (это обозначено на схеме крестиками). Радиусы шкивов R_1 и R_2 . Числа зубцов колес обозначены буквой z с соответствующими индексами.

Передаточное число данной многоступенчатой передачи

$$i_{15} = \frac{\omega_1}{\omega_5}.$$

Передаточные числа простых передач, входящих в состав данной многоступенчатой передачи,

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3}, \quad i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4}, \quad i_{45} = \frac{\omega_4}{\omega_5}.$$

Перемножив почленно данные передаточные числа, найдем

$$i_{12}i_{23}i_{34}i_{45} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_4} \frac{\omega_4}{\omega_5} = \frac{\omega_1}{\omega_5} = i_{15}.$$

Таким образом, мы получили, что *передаточное число многоступенчатой передачи равно произведению передаточных чисел всех входящих в ее состав простых передач*

$$i_{1n} = i_{12}i_{23} \dots i_{n-1, n}. \quad (113)$$

Передаточное число многоступенчатой передачи можно вычислить, зная, как определяются передаточные числа простых передач, входящих в ее состав.

Для двухступенчатой передачи цилиндрическими зубчатыми колесами от вала II к валу IV , изображенной на рис. 178, передаточное число

$$i_{24} = i_{23}i_{34} = -\frac{z_3}{z_2} \left(-\frac{z_4}{z_{3'}} \right) = \frac{z_3 z_4}{z_2 z_3}.$$

Для всей многоступенчатой передачи от вала I к валу V абсолютное значение передаточного числа

$$|i_{15}| = \left| \frac{\omega_1}{\omega_5} \right| = |i_{12}| \cdot |i_{23}| \cdot |i_{34}| \cdot |i_{45}| = \frac{R_2}{R_1} \frac{z_3}{z_2} \frac{z_4}{z_{3'}} \frac{z_5}{z_{4'}}.$$

Частным случаем многоступенчатой зубчатой передачи является так называемое *рядовое соединение зубчатых колес* (рис. 179). При таком соединении на каждой оси находится лишь одно зубчатое колесо.

Передаточное число для рядовой цилиндрической зубчатой передачи, изображенной на рис. 179, а, будет равно

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = i_{12}i_{23}i_{34} = -\frac{z_2}{z_1} \left(-\frac{z_3}{z_2} \right) \left(-\frac{z_4}{z_3} \right) = -\frac{z_4}{z_1}.$$

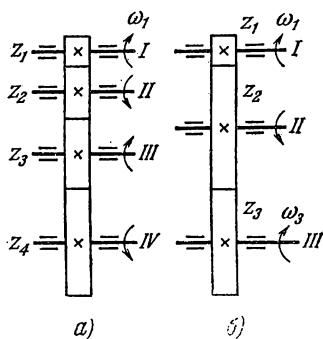


Рис. 179.

Для передачи, изображенной на рис. 179, б, передаточное число будет равно

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = i_{12}i_{23} = -\frac{z_2}{z_1} \left(-\frac{z_3}{z_2} \right) = \frac{z_3}{z_1}.$$

Как отмечалось выше, при передаче цилиндрическими колесами с внутренним зацеплением направление их вращения не изменяется. При передаче двумя цилиндрическими колесами с внешним зацеплением направления их вращения противоположны. Таким образом, знак передаточного числа сложной передачи цилиндрическими колесами зависит от числа внешних зацеплений. При четном числе k внешних зацеплений (как, например, для передачи от вала II к валу IV (рис. 178) или для передачи, изображенной на рис. 179, б) передаточное число будет положительным, т. е. ведомый вал вращается в ту

жé сторону, что и ведущий. При нечетном числе k внешних зацеплений (см. рис. 179, а) передаточное число будет отрицательным, т. е. ведомый вал будет вращаться в сторону, противоположную направлению вращения ведущего вала.

Следовательно,

$$i_{1n} = (-1)^k |i_{1n}| = (-1)^k \frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_2'} \frac{z_4}{z_3'} \dots \frac{z_n}{z_{(n-1)'}} \quad (114)$$

где k — число внешних зацеплений.

Из результатов вычисления передаточных чисел рядовых передач следует, что *наличие промежуточных колес в рядовой передаче не влияет на абсолютное численное значение передаточного числа*. Поэтому *промежуточные колеса рядовых передач* часто называют *паразитными колесами*.

При любом числе паразитных колес и любых их размерах *передаточное число рядовой зубчатой передачи равно по абсолютному значению отношению числа зубцов ведомого колеса к числу зубцов ведущего колеса*.

Не влияя на абсолютное значение передаточного числа, наличие паразитных колес, как видно из тех же результатов, сказывается на знаке передаточного числа, а следовательно, и на направлении вращения ведомого вала.

Свойствами паразитных колес определяется и их применение. Они вводятся в передаточный механизм в двух случаях:

1. При значительном расстоянии между осями ведущего и ведомого валов. Непосредственная передача вращения от ведущего вала к ведомому валу при помощи одной только пары зубчатых колес потребовала бы в этом случае изготовления колес слишком большого диаметра.

2. Когда требуется изменять направление вращения ведомого вала, не изменяя направления вращения ведущего. При введении только одного промежуточного (паразитного) колеса ведомый вал будет вращаться в ту же сторону, что и ведущий. При введении двух промежуточных колес ведомый вал будет уже вращаться в сторону, противоположную вращению ведущего.

Задача 79. Шкив II приводится в движение из состояния покоя бесконечным ремнем от шкива I двигателя (рис. 180). Диаметры шкивов: $D_1 = 25$ см, $D_2 = 50$ см; угловое ускорение шкива I

в период пуска двигателя постоянно и равно $\epsilon_1 = 2\pi$ рад/с². Определить в оборотах в минуту угловую скорость шкива II через 15 с после начала движения.

Решение. Так как угловое ускорение постоянно, то угловая скорость ω_1 шкива I через 15 с после пуска двигателя будет равна $\omega_1 = \omega_0 + \epsilon_1 t = 2\pi \cdot 15 = 30\pi$ рад/с.

Передаточное отношение между шкивами

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Отсюда угловая скорость шкива II через 15 секунд

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 D_1}{D_2} = \frac{30\pi \cdot 25}{50} = 15\pi \text{ рад/с}$$

или

$$n_2 = \frac{30\omega_2}{\pi} = \frac{30 \cdot 15\pi}{\pi} = 450 \text{ об/мин.}$$

Данную задачу можно было бы решить и иначе. Отношение угловых ускорений двух валов также равно передаточному отношению между ними: $\epsilon_2/\epsilon_1 = i_{21}$. Пользуясь этим, можно было бы, не определяя угловой скорости шкива I, определить по передаточному отношению угловое ускорение шкива II, а затем его угловую скорость по формуле $\omega_2 = \omega_0 + \epsilon_2 t$.

Задача 80. Сколько оборотов в минуту должна делать

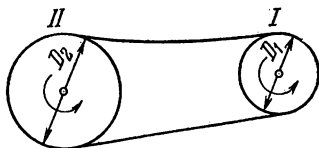


Рис. 180.

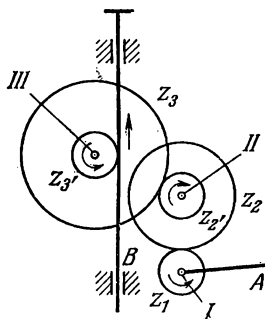


Рис. 181.

рукоятка A домкрата (кинематическая схема которого изображена на рис. 181) для того, чтобы зубчатая рейка B поднималась со скоростью $v = 10$ мм/с? Числа зубцов колес: $z_1 = 6$, $z_2 = 24$, $z_2' = 8$, $z_3 = 32$, $z_3' = 20$. Модуль зацепления колеса z_3' и рейки $m = 4$ мм.

Решение. По формуле (111) находим радиус начальной окружности колеса:

$$R_H = \frac{m z_{3'}}{2} = \frac{4 \cdot 20}{2} = 40 \text{ мм.}$$

Так как скорость рейки равна скорости точки, лежащей на начальной окружности колеса, находящегося в зацеплении с рейкой,

то угловая скорость колеса z_3 и вала III , на котором закреплено это колесо,

$$\omega_3 = \frac{v}{R_H} = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ рад/с.}$$

Абсолютное значение передаточного числа многоступенчатой передачи домкрата

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = i_{12} i_{23} = \frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_2'} = \frac{24}{6} \frac{32}{8} = 16.$$

Угловая скорость ведущего вала I и закрепленной на нем рукоятки

$$\omega_1 = \omega_3 i_{13} = 0,25 \cdot 16 = 4 \text{ рад/с, или}$$

$$n_1 = \frac{30\omega_1}{\pi} = \frac{30 \cdot 4}{3,14} \approx 38,2 \text{ об/мин.}$$

ГЛАВА XV

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 69. Абсолютное, относительное и переносное движения точки

Во введении в кинематику мы уже говорили, что всякое движение тела или точки есть движение относительное, т. е. его можно наблюдать и изучать лишь по отношению к другим физическим телам и связанным с ними системам отсчета.

В предыдущих главах мы рассматривали движение по отношению к так называемой «неподвижной» системе отсчета, за которую в технической практике принимают обычно систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Движение точки по отношению к системе отсчета, принимаемой за неподвижную, называется абсолютным движением.

В ряде случаев движение точки по отношению к неподвижной системе отсчета бывает удобно рассматривать как движение сложное, состоящее из двух одновременных движений: движения точки по отношению к некоторой подвижной системе отсчета и движения точки вместе с подвижной системой отсчета по отношению к неподвижной.

Так, например, движение какой-либо точки M колеса тепловоза (рис. 182), совершающееся по отношению к Земле, по кривой, называемой циклоидой, можно считать состоящим из двух простых движений: движения точки по окружности по отношению к корпусу тепловоза

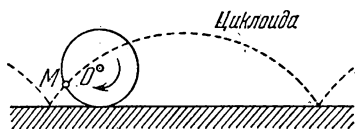


Рис. 182.

и движения этой точки вместе с поступательно движущимся корпусом тепловоза.

Движение точки по отношению к подвижной системе отсчета называется относительным движением.

Движение подвижной системы отсчета и всех неизменно связанных с ней точек по отношению к системе отсчета, принимаемой за неподвижную, называется переносным движением.

Чтобы определить переносное движение какой-либо точки в данный момент времени, надо мысленно прекратить относительное движение данной точки и определить в этот момент ее движение по отношению к неподвижной системе отсчета как точки, неизменно связанной с подвижной системой.

Аналогичным приемом бывает иногда удобно пользоваться и для выяснения относительного движения точки. Чтобы его определить, надо мысленно прекратить переносное движение точки.

В приведенном выше примере круговое движение точки M по отношению к движущемуся корпусу тепловоза есть, очевидно, относительное движение. Если эту точку мысленно неизменно связать с корпусом тепловоза, то ее движение вместе с ним будет переносным движением. Движение же точки M (по циклоиде) по отношению к Земле — абсолютное движение.

Приведем для пояснения еще несколько примеров. Движение человека по палубе движущегося по реке парохода есть движение относительное. Движение точки палубы парохода, в которой в данный момент находится человек, относительно берега реки — переносное движение, а движение человека относительно берега — абсолютное движение.

В механизме строгального станка (рис. 183) абсолютным движением точки A (центра шарнира, соединяющего ползун с кривошипом OA) будет ее движение по отношению к неподвижной станине станка. Этим движением является, очевидно, круговое движение точки A вокруг неподвижного центра O . Данное движение можно разложить на составляющие: движение точки A вдоль кулисы (подвижной направляющей) O_1B — относительное движение и вращательное (колебательное) движение вокруг центра O_1 той точки кулисы O_1B , с которой совпадает в данный момент точка A , — переносное движение.

изменяться. Но при вращении кулисы около неподвижной точки O_1 различные точки кулисы имеют различные линейные перемещения и различные линейные скорости, и потому переносная скорость точки A будет зависеть от того, какое положение эта точка занимает в данный момент по отношению к кулисе.

Следовательно, переносной скоростью $v_{\text{пер}}$ какой-либо точки M называется абсолютная скорость той неизменно связанной с подвижной системой точки, с которой совпадает в этот момент данная точка M .

Так как только при поступательном движении подвижной системы отсчета скорости всех связанных с ней точек одинаковы, то лишь в этом случае переносная скорость движущейся точки не будет зависеть от ее положения относительно подвижной системы отсчета и под ней в этом случае можно понимать скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

§ 70. Теорема сложения скоростей

Теорема. Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее переносной и относительной скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{\text{отн.}} \quad (115)$$

Доказательство. Пусть точка M движется относительно некоторой подвижной системы S отсчета и вместе с этой системой перемещается относительно неподвижной системы отсчета $Oxyz$ (рис. 184).

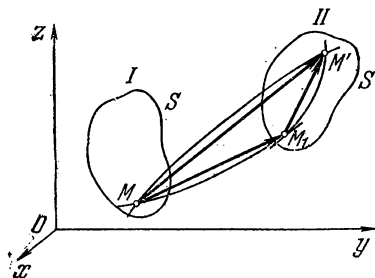


Рис. 184.

Пусть за некоторый промежуток времени Δt подвижная система S отсчета перемещается из положения I в положение II .

Если бы точка M не имела относительного движения, то она переместилась бы при этом относительно неподвижной системы отсчета $Oxyz$ по дуге $\overline{MM_1}$ некоторой траектории из положения M в положение M_1 , занимая относительно подвижной системы S неизменное положение.

Вектор $\overrightarrow{MM_1}$ можно будет назвать ¹⁾ вектором переносного перемещения точки M за данный промежуток времени Δt . Вследствие относительного движения точки M она перемещается за данный промежуток времени относительно подвижной системы S отсчета по дуге $\overline{M_1M'}$ траектории ее относительного движения и займет некоторое положение M' .

Вектор $\overrightarrow{M_1M'}$ можно, очевидно, назвать вектором относительного перемещения точки M за данный промежуток времени.

На самом деле оба движения (переносное и относительное) происходят одновременно, и точка M приходит за рассматриваемый промежуток времени Δt из положения M в положение M' , перемещаясь относительно неподвижной системы отсчета $Oxyz$ по некоторой дуге $\overline{MM'}$ траектории ее абсолютного движения. Вектор $\overrightarrow{MM'}$ будет представлять собой, следовательно, вектор абсолютного перемещения точки.

Из рис. 184 видно, что

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}.$$

Разделив обе части равенства на одну и ту же скалярную величину Δt (от чего векторное равенство не нарушится), получим

$$\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} + \frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t}.$$

Но, как мы знаем (стр. 214), отношение вектора перемещения точки (в каком-либо ее движении) к промежутку времени, в течение которого совершалось перемещение, дает нам вектор средней скорости точки за данный промежуток времени. Следовательно,

$$\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = v_{\text{ср}}, \quad \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = v_{\text{ср, пер}}, \quad \frac{\overrightarrow{M_1M'}}{\Delta t} = v_{\text{ср, отн}}.$$

Таким образом, мы получили

$$v_{\text{ср}} = v_{\text{ср, пер}} + v_{\text{ср, отн}}.$$

¹⁾ Вспомним (стр. 206), что вектором перемещения точки за данный промежуток времени Δt называется вектор, соединяющий положения точки в начале и в конце этого промежутка времени.

Если мы будем неограниченно уменьшать рассматриваемый промежуток времени Δt , то точки M_1 и M' будут неограниченно приближаться к точке M , а хорды $\overrightarrow{MM'}$, $\overrightarrow{MM_1}$ и $\overrightarrow{M_1M'}$ будут неограниченно приближаться к касательным к кривым MM' , MM_1 и M_1M' в точке M . В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ средние скорости точки за промежуток времени Δt превратятся в соответствующие истинные скорости точки в данный момент t , направленные по касательным к соответствующим кривым MM' , MM_1 , M_1M' (рис. 184). Таким образом, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, будем иметь

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср. пер}} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср. отн.}}$$

или

$$v = v_{\text{пер}} + v_{\text{отн.}}$$

Теорема доказана.

Так как при геометрическом сложении двух скоростей точки ее результирующая скорость изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих скоростях как на сторонах (рис. 185), или, что все равно, замыкающей стороной треугольника, построенного на векторах составляющих скоростей, то данную теорему называют часто *правилом параллелограмма*.

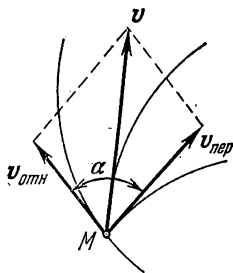


Рис. 185.

Если модули переносной $v_{\text{пер}}$ и относительной $v_{\text{отн}}$ скоростей точки и угол α между их направлениями известны, то модуль абсолютной скорости находится на основании

теоремы косинусов (совершенно так же, как и при сложении двух сил, приложенных к одной точке (стр. 43)):

$$v = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2 + 2v_{\text{пер}}v_{\text{отн}} \cos \alpha}. \quad (116)$$

Если направления переносного и относительного движений точки перпендикулярны друг к другу, то $\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$ и $v = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2}$. Если переносное и относительное движения направлены по одной прямой в одну сторону, то $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$ и $v = v_{\text{пер}} + v_{\text{отн}}$.

Если переносное и относительное движения направлены по одной прямой в противоположные стороны, то

$\alpha = 180^\circ$, $\cos \alpha = -1$ и $v = |v_{\text{пер}} - v_{\text{отн}}|$, т. е. в этом случае абсолютная скорость точки равна по модулю абсолютному значению разности между переносной и относительной скоростями точки и направлена в сторону большей скорости.

Задача 81. Теплоход движется прямолинейно с постоянной скоростью v_1 . Человек, стоящий на палубе, подбрасывает вертикально вверх мячик с начальной скоростью v_0 .

Найти, пренебрегая сопротивлением воздуха, абсолютную траекторию мячика и его абсолютную скорость.

Решение. По отношению к неподвижной системе отсчета мячик участвует в двух прямолинейных движениях: относительно (по отношению к палубе теплохода) — вертикальном движении под действием силы тяжести и переносом — горизонтальном равномерном движении вместе с палубой теплохода.

Примем неподвижную точку, соответствующую тому месту палубы, из которого был брошен мячик, за начало неподвижной системы координат и проведем из нее оси: x — горизонтально, в направлении движения теплохода, и y — вертикально вверх. При таком выборе системы отсчета уравнением движения мячика, неизменно связанного с кораблем (уравнением равномерного движения теплохода), будет

$$x = v_1 t.$$

Уравнением же относительного движения мячика (уравнением его движения по отношению к подвижной системе отсчета — палубе теплохода) согласно формуле (89) будет $y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Этими

уравнениями определяются в каждый данный момент времени t координаты мячика относительно неподвижной системы отсчета. Чтобы определить уравнение траектории мячика относительно этой системы отсчета, нужно исключить время t из данных уравнений. Из первого уравнения имеем $t = x/v_1$. Подставляя это значение t во второе уравнение, получим

$$y = \frac{v_0}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2.$$

Следовательно, абсолютной траекторией мячика будет парабола, определяемая данным уравнением; переносная скорость мячика

$$v_{\text{пер}} = v_1;$$

по формуле (88) относительная скорость мячика

$$v_{\text{отн}} = v_0 - gt;$$

следовательно, абсолютная скорость мячика

$$v = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2} = \sqrt{v_1^2 + (v_0 - gt)^2}.$$

Задача 82. Кулачок, имеющий форму клина ABC с углом α (рис. 186), движется поступательно по горизонтальной плоскости со скоростью u . Определить скорость стержня (толкателя) DE , опирающегося на кулачок и свободно скользящего в неподвижной муфте.

Решение. При движении клина вправо стержень DE получает поступательное движение по вертикали вверх. Так как при поступательном движении стержня все его точки имеют одинаковые скорости, то найдем скорость одной точки D . Если мы примем за систему отсчета клин, то по отношению к нему точка D перемещается вдоль прямой BC .

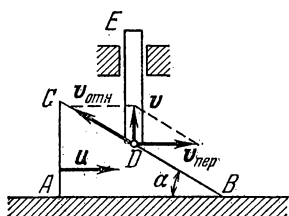


Рис. 186.

Так как сам клин движется поступательно, то переносная скорость точки D нам известна и по величине, и по направлению $v_{пер} = u$. Строим параллелограмм скоростей точки D .

Из конца вектора $v_{пер}$ переносной скорости точки D проводим прямую, параллельную относительной скорости (прямой BC), до пересечения ее с прямой DE , по которой направлена абсолютная скорость.

Из прямоугольного треугольника скоростей находим

$$v = v_{пер} \operatorname{tg} \alpha = u \operatorname{tg} \alpha.$$

Задача 83. Кривошип O_1A и O_2B осей O_1 и O_2 тепловоза (рис. 187) длиной $r = O_1A = O_2B = 1$ м вращаются с постоянной

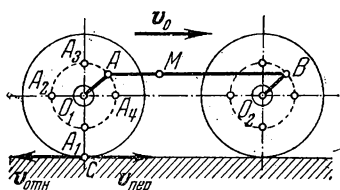


Рис. 187.

угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с и соединены между собой спарником AB . Радиусы колес $R = 1,5$ м. Колеса катятся по рельсам без скольжения. Определить абсолютную скорость любой точки M спарника AB для четырех указанных на рис. 187 положений кривошипа: A_1, A_2, A_3 и A_4 .

Решение. Так как спарник AB совершает поступательное движение, то скорости всех его точек одинаковы. Скорость точки M равна скорости точки A (точки, в которой конец спарника шарнирно соединен с кривошипом O_1A). Точку A можно считать участвующей в двух движениях: в относительном — вращательном движении вокруг оси O_1 тепловоза и в переносном — вместе с колесом в его поступательном движении со скоростью, равной скорости v_0 оси O_1 колеса. Найдем скорость v_0 оси O_1 тепловоза или, что то же, скорость тепловоза. Рассмотрим движение точки C колеса, в которой оно касается рельса. Эта точка также участвует в двух движениях: в переносном, со скоростью $v_{пер} = v_0$, и в относительном — вращательном вокруг оси O_1 . Относительная скорость $v_{отн}$ точки должна быть, очевидно, направлена (так, как показано на рис. 187) по касательной к окружности колеса в сторону его вращения и равна по модулю $v_{отн} = R\omega$.

Но колесо катится без скольжения, поэтому абсолютная скорость точки касания колеса с рельсом должна равняться нулю. Отсюда, так как переносное и относительное движения точки C направлены по одной прямой в противоположные стороны, имеем

$$v = v_{\text{пер}} - v_{\text{отн}} = v_0 - R\omega = 0,$$

или $v_0 = R\omega = 1,5 \cdot 10 = 15$ м/с.

Относительная скорость точки A (линейная скорость ее вращения вокруг оси) $v_{\text{отн}} = r\omega = 1 \cdot 10 = 10$ м/с = const. Направление же этой скорости меняется в зависимости от положения точки A . Переносная скорость этой точки $v_{\text{пер}} = v_0$. Строим теперь (рис. 188) параллелограммы скоростей для различных положений кривошипа и из них определяем модуль и направление абсолютной скорости точки A :

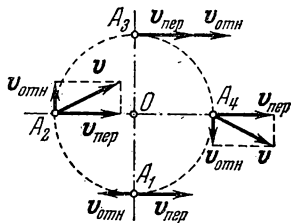


Рис. 188.

- 1) $v = v_{\text{пер}} - v_{\text{отн}} = 15 - 10 = 5$ м/с;
- 2) $v = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2} = \sqrt{15^2 + 10^2} \approx 18$ м/с;
- 3) $v = v_{\text{пер}} + v_{\text{отн}} = 15 + 10 = 25$ м/с;
- 4) $v = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2} = \sqrt{15^2 + 10^2} \approx 18$ м/с.

§ 71. Разложение скорости точки на составляющие

Весьма часто приходится по известной абсолютной скорости точки определять ее составляющие, т. е. производить разложение абсолютной скорости. Подобно тому как задача сложения скоростей аналогична задаче сложения двух сил, приложенных к одной точке, так и обратная ей задача разложения абсолютной скорости точки на переносную и относительную скорости полностью аналогична задаче разложения силы на две сходящиеся составляющие (§ 9). Решение этих задач будет правильным в том случае, когда абсолютная скорость представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на векторах переносной и относительной скоростей точки. Так как по данной диагонали можно построить бесчисленное множество параллелограммов, то, подобно задаче разложения силы, задача разложения скорости точки в общем случае является неопределенной. Для определенности решения этой задачи требуется задание двух дополнительных условий (или направления составляющих скоростей, или модуля и направления одной из них и т. д.).

Задача 84. Сколько времени пассажир поезда, идущего со скоростью 72 км/ч, будет видеть встречный поезд, если скорость последнего равна 54 км/ч? Длина встречного поезда $l = 175$ м.

Решение. Связав со вторым поездом подвижную систему отсчета, найдем относительную скорость первого поезда, т. е. его скорость по отношению ко второму поезду. Нам известна абсолютная скорость первого поезда, т. е. его скорость по отношению к неподвижной системе отсчета (полотну железной дороги): $v = 72$ км/ч, и его переносная скорость, т. е. поступательная скорость подвижной системы отсчета (второго поезда) по отношению к той же неподвижной системе: $v_{\text{пер}} = 54$ км/ч. Оба движения направлены по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно,

$$v = v_{\text{отн}} + v_{\text{пер}},$$

откуда

$$v_{\text{отн}} = v + v_{\text{пер}} = 72 + 54 = 126 \text{ км/ч} = \frac{126 \cdot 1000}{3600} = 35 \text{ м/с}.$$

Время, в течение которого пассажир первого поезда будет видеть встречный поезд,

$$t = \frac{l}{v_{\text{отн}}} = \frac{175}{35} = 5 \text{ с}.$$

Задача 85. Прямолинейная кулиса кривошипно-кулисного механизма (рис. 189) приводит молот совершает возвратно-поступательное движение. Кулиса приводится в движение камнем (ползуном) А, соединенным с концом кривошипа ОА, длина которого $r = 30$ см и который вращается равномерно с угловой скоростью $n = 150$ об/мин. При $t = 0$ кулиса занимает нижнее положение. Найти скорость молота (кулисы) в момент t .

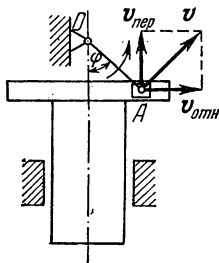


Рис. 189.

Решение. Выразим угловую скорость кривошипа в радианах в секунду: $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 150}{30} = 5\pi$ рад/с. Будем отсчитывать угол поворота кривошипа от его нижнего, вертикального положения. Тогда при $t = 0$ $\phi_0 = 0$. Следовательно, в момент t угол поворота кривошипа $\phi = \omega t = 5\pi t$. Абсолютная скорость точки А (центра шарнира, соединяющего кривошип с ползуном) равна по модулю $v = r\omega = 30 \cdot 5\pi = 150\pi$ см/с и направлена перпендикулярно к радиусу кривошипа в сторону его вращения.

С другой стороны, точку А можно считать участвующей в двух движениях: относительном — горизонтальном — движении ползуна вдоль подвижной направляющей (кулисы) и переносном — вместе с вертикальным поступательным движением кулисы.

Строим параллелограмм (рис. 189), диагональю которого является известный по величине и по направлению вектор v абсолютной скорости точки А, а сторонами — известные только по направлению векторы относительной $v_{\text{отн}}$ и переносной $v_{\text{пер}}$ скоростей той же точки.

Из данного параллелограмма (прямоугольника) находим скорость молота (кулисы), служащую для точки А переносной скоростью:

$$v_{\text{пер}} = v \sin \phi = 150\pi \sin 5\pi t \text{ см/с}.$$

ГЛАВА XVI

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 72. Понятие сложного движения тела

Понятие сложного движения тела аналогично понятию сложного движения точки. В ряде случаев движение тела относительно неподвижной системы отсчета удобно рассматривать как движение сложное, состоящее из двух движений: относительного, т. е. движения тела по отношению к некоторой подвижной системе отсчета, и переносного — движения тела вместе с подвижной системой отсчета по отношению к неподвижной.

Всякое сложное движение тела можно свести к той или иной совокупности поступательных и вращательных движений, являющихся не только простейшими, но и основными видами движения твердого тела. Задача определения абсолютного движения тела сводится обычно поэтому к задаче сложения или поступательных движений, или вращательных движений, или вращательного и поступательного движений, в зависимости от того, какими движениями будут переносное и относительное движения тела. Некоторые, особо важные для практики, частные случаи такого сложения движений тела и рассматриваются в данной главе.

Нужно иметь в виду при этом, что мы будем определять здесь только так называемое *мгновенное абсолютное движение* тела, т. е. устанавливать способы определения абсолютных скоростей его точек в данный момент времени.

§ 73. Понятие плоскопараллельного движения тела

Плоскопараллельным или плоским движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Частным случаем такого движения является уже изученное нами вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. При вращательном движении, как мы знаем, все точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, и, следовательно, любая из этих плоскостей может быть принята за неподвижную, параллельно которой движутся все точки тела.

В ряде случаев плоскопараллельное движение тела может быть одновременно и поступательным движением. Однако поступательное движение нельзя, вообще говоря, рассматривать как частный случай плоскопараллельного движения. Не всякое поступательное движение тела есть плоскопараллельное движение, так же как и не всякое плоскопараллельное движение тела есть поступательное движение.

Представим себе какую-нибудь призму, основание которой любым образом перемещается по неподвижной плоскости Π (рис. 190). При таком движении призмы

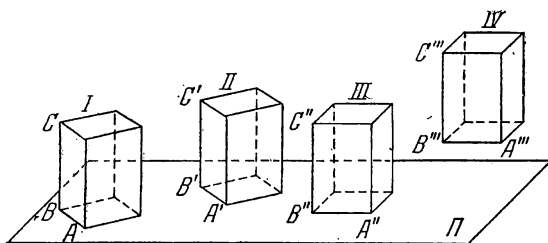


Рис. 190.

все ее точки будут, очевидно, перемещаться в плоскостях, параллельных неподвижной плоскости Π , и поэтому данное движение призмы будет плоскопараллельным.

Если при переходе призмы из положения I в положение II (см. рис. 190) любая прямая, неразрывно с ней связанная, остается во все время данного движения призмы параллельной самой себе, то движение призмы — плоскопараллельное и поступательное. При переходе же призмы из положения II в положение III , как это видно из того же рисунка, уже не всякая прямая, связанная с призмой (как, например, прямая AB), остается параллельной самой себе, и движение призмы

за соответствующий промежуток времени уже не будет поступательным, хотя по-прежнему остается плоскопараллельным. При переходе призмы из положения *III* в положение *IV* (рис. 190) основания и боковые грани призмы смещаются в другие плоскости, и движение призмы не будет плоскопараллельным, хотя оно могло быть и поступательным, если во время данного перемещения любая прямая, неразрывно связанная с призмой, оставалась параллельной самой себе.

Плоскопараллельное движение имеет огромное распространение в технике. Подавляющее большинство встречающихся на практике механизмов являются плоскими, т. е. представляют собой сочленение твердых тел, совершающих плоскопараллельное движение.

Таково, например, движение всех звеньев кривошипно-ползунного механизма (рис. 191), состоящего из кривошипа *OA*, ползуна *B* и шарнирно соединенного с ними шатуна *AB*.

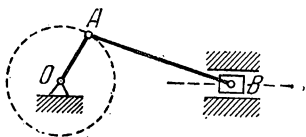


Рис. 191.

Все точки каждого из звеньев движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости (плоскости чертежа на рис. 191). Плоскопараллельное движение кривошипа будет являться вместе с тем и вращательным движением вокруг неподвижной оси *O*. Плоскопараллельное движение ползуна будет одновременно и поступательным движением вдоль неподвижных направляющих. Плоскопараллельное же движение шатуна не будет ни вращательным (так как шатун не имеет неподвижных точек), ни поступательным (так как прямая *AB* не остается при движении шатуна параллельной самой себе).

Плоскопараллельное движение совершают: колесо, катящееся по прямолинейному рельсу¹⁾, механизм спарника и кулисный механизм, рассмотренные в задачах 83 и 85, и многие другие.

Выясним теперь, как можно упростить изучение этого весьма важного вида движения твердого тела. Пусть

¹⁾ Все точки колеса движутся при этом в плоскостях, параллельных неподвижной вертикальной плоскости, проходящей через среднюю линию рельса. При движении по закруглению движение колеса уже не будет плоскопараллельным.

тело движется параллельно некоторой неподвижной плоскости Π (рис. 192). Если мы пересечем данное тело плоскостью Π' , параллельной неподвижной плоскости Π , то в сечении получится какая-то плоская фигура S . Эта фигура будет перемещаться при движении тела, оставаясь все время в той же плоскости Π' . Очевидно, что при таком движении тела все его точки, лежащие на перпендикуляре Aa к плоскости фигуры S , восстановленном в какой-нибудь ее точке a , движутся совершенно одинаково, так же, как и точка a этой фигуры. Все точки тела, лежащие на перпендикуляре Bb , движутся так же, как и точка b фигуры S , и т. д.

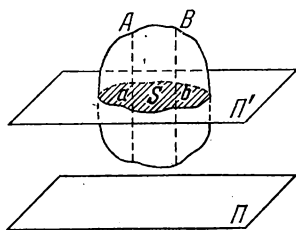


Рис. 192.

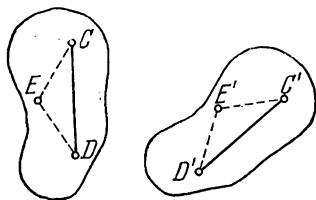


Рис. 193.

Отсюда следует, что для определения плоскопараллельного движения тела достаточно знать движение неизменяемой плоской фигуры, получающейся при пересечении тела какой-либо плоскостью, параллельной данной неподвижной плоскости.

Изучением движения этой плоской фигуры в ее плоскости можно заменить; следовательно, изучение плоскопараллельного движения тела.

Заметим также, что положение на плоскости неизменяемой плоской фигуры вполне определяется положением двух любых ее точек или, что все равно, положением какого-либо прямолинейного отрезка, неизменно связанного с движущейся фигурой. Допустим, что при перемещении этой фигуры неизменно связанный с нею отрезок CD занял в той же плоскости положение $C'D'$ (рис. 193). Так как расстояния DE и CE любой точки E фигуры от данных ее точек D и C неизменны, то новое положение этой точки легко определяется построением треугольника $D'E'C'$, конгруэнтного DEC .

§ 74. Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное. Зависимость между скоростями различных точек этой фигуры

Пусть неизменно связанная с плоской фигурой произвольная прямая перемещается при движении этой фигуры за некоторый промежуток времени из положения AB в положение $A'B'$ (рис. 194).

Это перемещение плоской фигуры можно представить себе составленным из поступательного и вращательного перемещений (рис. 194, а). В самом деле, перемещение прямой AB в положение $A'B'$ можно было бы получить поступательным ее перемещением в положение $A'B''$ или $A'B'$ и вращательным перемещением этой прямой вокруг оси, проходящей соответственно через точку A' или точку B' и перпендикулярной к плоскости фигуры.

Произвольная точка, связанная с движущейся фигурой и принимаемая за центр ее поворота, называется *полюсом*. Нетрудно видеть, что, выбирая различные полюсы, мы изменяем только поступательную часть перемещения фигуры, угол же поворота и направление вращения фигуры от выбора полюса не зависят.

Так, при поступательном перемещении прямой AB в положение $A'B'$ все точки фигуры имеют перемещения, равные действительному перемещению точки A этой фигуры, а при поступательном перемещении прямой AB в положение $A''B'$ все точки фигуры имеют перемещения, равные действительному перемещению точки B фигуры. Но перемещения точек A и B при переходе прямой AB в положение $A'B'$, вообще говоря, не равны друг другу. Угол же поворота $B''A'B'$, совершаемый прямой $B''A'$ при переходе ее в положение $A'B'$ вращением вокруг точки A' , равен (как накрест лежащий) углу поворота

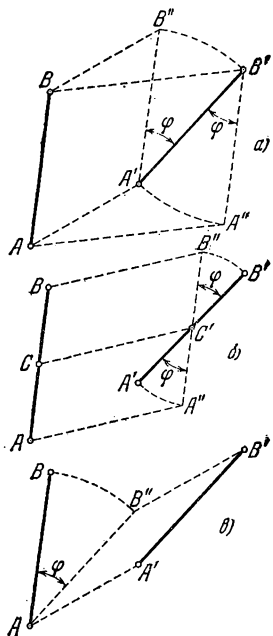


Рис. 194.

$A''B'A'$, совершаемому прямой $A'B'$ при переводе ее в то же положение $A'B'$ вращением вокруг точки B' . Одинаковым будет при этом и направление вращения прямых $B''A'$ и $A''B'$ (на рис. 194 по часовой стрелке).

К тому же результату мы придем, если примем за полюс любую иную точку C (рис. 194, б), связанную с движущейся фигурой, или если мы сначала повернем прямую AB вокруг какой-либо ее точки на соответствующий угол φ , а затем уже дадим ей поступательное перемещение (рис. 194, в).

Таким образом, *всякое перемещение плоской фигуры в ее плоскости может быть достигнуто совокупностью поступательного перемещения фигуры, равного перемещению произвольно выбранной ее точки (полюса), и вращательного перемещения фигуры вокруг оси, проходящей через выбранный полюс и перпендикулярной к плоскости фигуры.*

Данное положение справедливо как для конечных, так и для бесконечно малых перемещений плоской фигуры.

Нужно заметить, что в случае конечного перемещения фигуры, т. е. перемещения ее за конечный промежуток времени, подобная замена фактического сложного движения фигуры двумя последовательными (поступательным и вращательным) перемещениями не воспроизводит, вообще говоря, этого движения. При помощи такой замены мы получаем лишь тот же самый конечный результат — то же самое новое положение фигуры. В промежутке же между рассматриваемыми положениями фигура могла занимать на плоскости любые положения, совсем не совпадающие с теми ее положениями, которые получаются при раздельном осуществлении поступательного и вращательного перемещений.

Для того чтобы воспроизвести фактическое движение фигуры за некоторый промежуток времени, разобьем его на большое число очень малых промежутков времени и отметим те положения, которые занимает фигура в конце каждого из этих промежутков. Выбрав какую-либо произвольную точку фигуры за полюс, будем осуществлять переход фигуры из каждого данного положения в близкое ему соседнее путем поступательного перемещения фигуры, соответствующего поступательному перемещению выбранного полюса, и вращательного перемещения фигуры вокруг оси, проходящей через полюс

перпендикулярно к плоскости фигуры. Непрерывно увеличивая число промежутков времени и уменьшая тем самым их величину, мы будем проводить фигуру через все большее и большее число положений, которые она на самом деле занимает в конце каждого из данных малых промежутков времени. В пределе, когда величина этих промежутков времени будет стремиться к нулю, мы проведем фигуру через все положения, которые она занимает при своем фактическом движении. Таким образом, мы приходим к выводу: *всякое движение плоской фигуры в ее плоскости можно разложить на два движения: 1) поступательное движение вместе с произвольно выбранной точкой фигуры (полюсом) и 2) вращательное движение вокруг этой точки.*

Выше было показано, что угол φ поворота фигуры и направление ее вращения не зависят от выбора полюса.

Отсюда следует, что и угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

от выбора полюса не зависит и является при плоскопараллельном движении тела кинематической характеристикой, общей для всех точек тела.

Пусть некоторая плоская фигура S движется в ее плоскости (рис. 195). Примем какую-либо произвольную точку A фигуры (рис. 195, a) за полюс. Тогда, как установлено выше, можно считать, что по отношению к неподвижной системе отсчета (связанной с плоскостью, в которой движется фигура) любая другая точка B фигуры участвует одновременно в двух движениях: переносном — вместе с фигурой в ее поступательном движении со скоростью v_A выбранного полюса и относительном — вращательном движении вокруг полюса A с угловой скоростью ω , не зависящей от выбора полюса.

Отсюда на основании теоремы о сложении скоростей имеем, что абсолютная или просто, как мы ее будем называть в дальнейшем, *скорость любой точки плоской фигуры в каждый данный момент равна геометрической сумме двух скоростей: скорости другой, произвольно выбранной, точки фигуры (полюса) и вращательной скорости первой точки относительно второй:*

$$v_B = v_A + v_{BA}, \quad (117)$$

где v_B — скорость любой точки B плоской фигуры, v_A — скорость другой произвольной точки (полюса) A фигуры, v_{BA} — вращательная скорость первой точки относительно второй (полюса).

Вращательную скорость точки B относительно точки A легко найти по величине и по направлению; если известны для данного момента времени угловая скорость фигуры и положение точек B и A . Модуль этой скорости $v_{BA} = \omega \cdot BA$, где ω — угловая скорость фигуры, BA — расстояние между точками B и A . Направлена же скорость v_{BA} , как и всякая вращательная скорость, перпендикулярно к соответствующему радиусу вращения (т. е. к отрезку BA) в сторону вращения фигуры (на рис. 195 стрелкой показано вращение по ходу часовой стрелки).

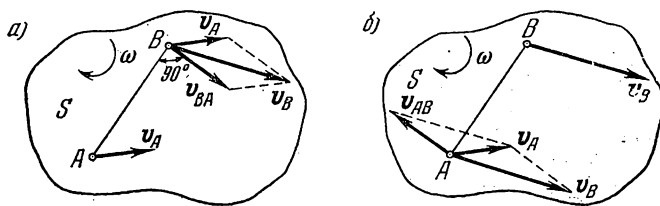


Рис. 195.

Определив вращательную скорость v_{BA} точки B относительно полюса и зная скорость v_A самого полюса, находим искомую скорость точки B как диагональ параллелограмма, построенного на векторах v_A и v_{BA} составляющих скоростей (рис. 195, а).

Заметим, что формулой (117) устанавливается зависимость между скоростями двух каких угодно точек плоской фигуры, причем за полюс может быть выбрана любая из этих точек. Обычно за полюс принимается та точка фигуры, скорость которой в данный момент нам известна. Так, если бы для фигуры, изображенной на рис. 195, нам была известна скорость точки B , а требовалось бы, напротив, определить скорость точки A , то, приняв за полюс точку B , мы бы записали:

$$v_A = v_B + v_{AB}.$$

В этом равенстве вращательная скорость точки A относительно точки B по-прежнему будет равна по мо-

дулю $v_{AB} = \omega \cdot AB$. Направлена же она будет (рис. 195, б) противоположно скорости v_{BA} , так как скорости v_{AB} и v_{BA} перпендикулярны к одному и тому же отрезку AB и направлены в сторону его вращения вокруг разных его концов (в обоих случаях в данном примере по часовой стрелке).

Строя параллелограмм на векторах v_B и v_{AB} , являющихся теперь составляющими скорости v_A точки A , находим последнюю как диагональ этого параллелограмма (рис. 195, б).

Задача 86. Стержень AB (рис. 196) движется в плоскости Oxy так, что нижний его конец A скользит по оси x , а сам стержень касается вертикальной стены OC . Для момента, когда ось стержня AB наклонена к оси x под углом $\varphi = 60^\circ$ и скорость нижнего конца стержня $v_A = 4$ м/с, определить скорость той точки C стержня, в которой он касается стены, а также угловую скорость ω стержня. Высота стены $OC = 2$ м.

Решение. Стержень AB совершает плоское движение. Скорость одной его точки, точки A , нам известна. Принимаем эту точку за полюс. Тогда скорость другой точки C стержня $v_C = v_A + v_{CA}$.

Вращательная скорость точки C относительно точки A будет равна по модулю $v_{CA} = \omega \cdot CA$, где ω — угловая скорость стержня AB . Направлена же скорость v_{CA} перпендикулярно к отрезку CA в сторону его вращения. Так как точка A движется по оси x вправо, то угол φ будет при этом движении уменьшаться, и, следовательно, вращение стержня AB направлено против часовой стрелки. Таким образом, направление скорости v_{CA} мы знаем. Так как в точке C стержень касается стены, то скорость v_C этой точки может быть направлена только ¹⁾ вдоль стержня. С другой стороны, вектор v_C должен являться диагональю параллелограмма, построенного на векторе v_A (известном нам по модулю и по направлению) и на векторе v_{CA} (известном нам по направлению) как на сторонах. По данным условиям можно построить только один параллелограмм (рис. 196). Так как угол между v_C и v_{CA} прямой, то из

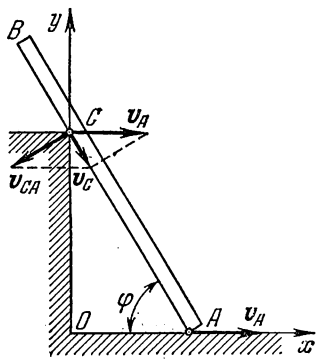


Рис. 196.

¹⁾ Если бы скорость этой точки была направлена как-нибудь иначе, то ее можно было бы разложить на две составляющие: одну, направленную вдоль стержня, и другую, направленную перпендикулярно к стержню. Но последней составляющей быть не может, так как движению точки C , перпендикулярному к стержню, препятствует стена.

прямоугольного треугольника находим

$$v_C = v_A \cos \varphi = v_A \cos 60^\circ = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ м/с},$$

$$v_{CA} = v_A \sin \varphi = v_A \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ м/с}.$$

Из прямоугольного треугольника OAC находим длину отрезка AC для данного момента:

$$AC = \frac{OC}{\sin \varphi} = \frac{OC}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{3} \text{ м}.$$

Угловая скорость стержня AB в данный момент равна

$$\omega = \frac{v_{CA}}{CA} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{4}{3}\sqrt{3}} = 1,5 \text{ рад/с}.$$

§ 75 *. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры

Теорема. *Проекции скоростей двух точек фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.*

Доказательство. Принимая какую-либо точку A фигуры за полюс (рис. 197), получаем для скорости

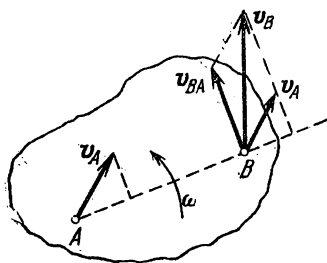


Рис. 197.

другой произвольной точки B фигуры следующее векторное равенство (формула (117)): $v_B = v_A + v_{BA}$. Проектируя векторы, входящие в обе части данного равенства, на прямую AB , находим $(v_B)_{AB} = (v_A)_{AB} + (v_{BA})_{AB}$. Но вектор v_{BA} вращательной скорости точки B относительно точки A перпендикулярен к отрезку

AB , и потому его проекция на прямую AB равна нулю, т. е. $(v_{BA})_{AB} = 0$. Таким образом, получаем, что $(v_B)_{AB} = (v_A)_{AB}$, и теорема доказана.

Задача 87. Прямолинейный отрезок AB движется в плоскости, причем скорости его концов образуют с прямой AB углы α и β

(рис. 198). Определить скорость v_B , если известна скорость v_A точки A ,

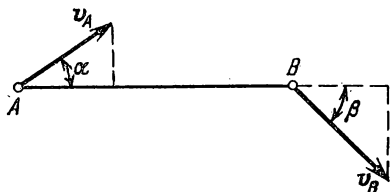


Рис. 198.

Решение. На основании теоремы о проекциях скоростей двух точек фигуры на прямую, соединяющую эти точки, имеем

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta,$$

отсюда

$$v_B = v_A \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

§ 76. Мгновенный центр скоростей фигуры

В § 75 мы установили, что скорость любой точки плоской фигуры в каждый данный момент времени можно рассматривать как геометрическую сумму двух скоростей: скорости полюса и вращательной скорости данной точки вокруг полюса, причем за полюс может быть взята любая точка фигуры. Эта произвольность выбора полюса позволяет внести значительное упрощение в изучение движения плоской фигуры.

При всяком движении этой фигуры (кроме поступательного) всегда можно отыскать такую точку, лежащую или на самой движущейся фигуре, или на ее мысленном продолжении, скорость которой в данный момент равна нулю. В самом деле, пусть в данный момент скорость какой-либо произвольной точки A фигуры (рис. 199) равна v_A , причем сторона вращения фигуры (на рис. 199 она указана стрелкой) и угловая скорость его ω нам также известны. Восставим в точке A фигуры перпендикуляр к скорости этой точки так, чтобы угол 90° был отсчитан от вектора v_A в сторону вращения

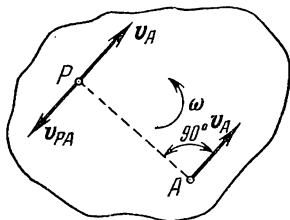


Рис. 199.

фигуры, и отложим на нем отрезок $AP = v_A/\omega$. Примем точку A за полюс. Тогда скорость точки P , как и скорость всякой другой точки фигуры¹⁾ при ее плоском движении, будет складываться из скорости v_A полюса A и вращательной скорости v_{PA} точки P вокруг этого полюса:

$$v_P = v_A + v_{PA}.$$

Модуль вращательной скорости

$$v_{PA} = \omega \cdot AP = \omega \frac{v_A}{\omega} = v_A,$$

т. е. он равен модулю скорости v_A полюса. Направлена же вращательная скорость v_{PA} перпендикулярно к отрезку AP в сторону вращения фигуры, т. е. по одной прямой со скоростью v_A полюса, но в противоположную сторону (рис. 199).

Ясно, что геометрическая сумма двух противоположных векторов v_A и v_{PA} равна нулю, а потому в данный момент абсолютная скорость точки P , т. е. ее скорость по отношению к неподвижной плоскости, в которой движется фигура, $v_P = 0$.

Неизменно связанная с движущейся плоской фигурой точка P , скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется мгновенным центром скоростей этой фигуры.

Мгновенный центр P скоростей фигуры, как видно из способа, при помощи которого мы нашли его положение, всегда лежит на линии, проведенной из какой-либо точки фигуры перпендикулярно к направлению скорости этой точки.

Если известны направления скоростей двух каких-либо точек фигуры, то мгновенный центр P скоростей этой фигуры легко находится как точка пересечения линий, проведенных из данных точек фигуры перпендикулярно к векторам скоростей этих точек (рис. 200).

Найдя положение мгновенного центра скоростей P и зная для данного момента скорость какой-либо точки A фигуры не только по направлению, но и по модулю,

¹⁾ Может оказаться, что мгновенный центр скоростей P лежит вне контура данной плоской фигуры. Связав неразрывно с данной фигурой неограниченную плоскость, будем считать точку P и в этом случае принадлежащей движущейся фигуре.

легко найти и угловую скорость фигуры, соответствующую этому моменту времени. Так как

$$AP = \frac{v_A}{\omega},$$

то

$$\omega = \frac{v_A}{AP}. \quad (118)$$

Угловая скорость фигуры в каждый момент равна отношению модуля соответствующей этому моменту скорости какой-либо точки фигуры к расстоянию от этой точки до мгновенного центра скоростей. Направление же вращения фигуры определяется известным направлением скорости ее точки.

Указанный выше прием определения мгновенного центра скоростей фигуры как точки пересечения перпендикуляров, восставленных к векторам скоростей двух точек фигуры, неприменим, очевидно, в тех случаях, когда эти скорости параллельны. При этом возможны два случая.

1. Скорости двух точек A и B фигуры параллельны, но эти точки не лежат на одном перпендикуляре к направлению данных скоростей (рис. 201).

Так как перпендикуляры, восставленные из точек A и B к их скоростям, не пересекаются, то в данном случае мгновенного центра скоростей фигуры не существует (он лежит в бесконечности). Расстояния данных точек от мгновенного центра скоростей $AP = BP = \infty$. Угловая скорость фигуры в данный момент

$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0,$$

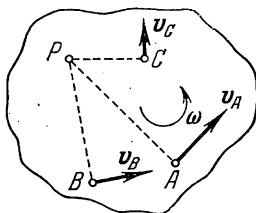


Рис. 200.

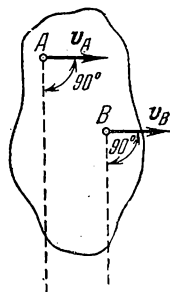


Рис. 201.

и вращение фигуры в этот момент, следовательно, отсутствует. А так как всякое абсолютное плоское движение фигуры можно рассматривать как совокупность поступательного движения со скоростью произвольно выбранного полюса и вращательного движения вокруг

этого полюса (с угловой скоростью ω , не зависящей от выбора полюса), то абсолютные скорости точек фигуры в данном случае равны только скорости полюса. Другими словами, в этом случае *фигура совершает в данный момент поступательное¹⁾ движение, и скорости всех ее точек в этот момент равны между собой.*

2. Скорости двух точек A и B фигуры параллельны, и эти точки лежат на одном перпендикуляре к направлению данных скоростей (рис. 202).

В данном случае перпендикуляры, восстановленные в точках A и B фигуры к направлениям их скоростей,

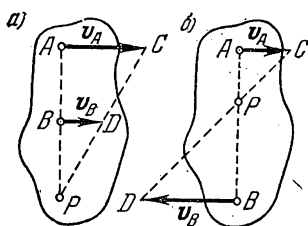


Рис. 202.

сливаются в одну прямую и для определения положения мгновенного центра скоростей нужно знать скорости двух точек фигуры не только по направлению, но и по модулю.

Так как мгновенный центр скоростей всегда лежит на перпендикуляре, восстановленном в любой точке фигуры к направлению ее скорости, а модули скоростей

различных точек фигуры в каждый данный момент пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра, то положение этой точки P на перпендикуляре может быть найдено из пропорции $AP/BP = v_A/v_B$.

Если мы проведем через концы C и D (рис. 202, а и б) векторов v_A и v_B прямую, то она пересечет прямую AB , соединяющую данные точки фигуры, в точке P , являющейся мгновенным центром скоростей фигуры. В самом деле, исходя из подобия получающихся при этом треугольников PAC и PBD , можно составить написанную выше пропорцию.

Если при этом $v_A = v_B$, то фигура совершает в данный момент поступательное движение (так же как и в предыдущем случае).

В практических задачах часто приходится иметь дело со случаями, когда плоская фигура движется так, что

¹⁾ В отличие от непрерывного поступательного движения тела, при котором скорости всех его точек равны между собой в каждый момент времени, движение тела, при котором скорости его точек равны между собой только в данный момент, называют иногда *мгновенным поступательным движением*.

ее контур катится без скольжения по некоторой неподвижной кривой. Так как в каждый данный момент у движущейся плоской фигуры может быть только одна точка, имеющая скорость, равную нулю, а при качении без скольжения таковой является точка фигуры, в которой она касается неподвижной кривой, то *при качении без скольжения контура фигуры по неподвижной кривой мгновенным центром скоростей будет точка касания этого контура с неподвижной кривой.*

§ 77. Распределение скоростей точек плоской фигуры

Принимая мгновенный центр P скоростей фигуры за полюс, легко найти скорости всех остальных точек фигуры в этот момент времени:

$$\begin{aligned} v_A &= v_P + v_{AP} = v_{AP}, & v_B &= v_P + v_{BP} = v_{BP}, \\ v_C &= v_P + v_{CP} = v_{CP} \end{aligned} \quad (119)$$

и т. д.

Следовательно, *скорость любой точки плоской фигуры равна вращательной скорости этой точки вокруг мгновенного центра скоростей фигуры.*

Исходя из этого, легко найти модуль и направление скорости каждой точки фигуры (если положение мгновенного центра P и угловая скорость фигуры, не зависящая от выбора полюса, для данного момента времени известны): $v_A = \omega \cdot AP$, $v_B = \omega \cdot BP$ и т. д. (формула (119)). Деля почленно обе части данных равенств, находим $v_B/v_A = BP/AP$.

Модули скоростей различных точек фигуры в каждый данный момент пропорциональны расстояниям этих точек от соответствующего данному моменту мгновенного центра скоростей фигуры. Направлены же скорости различных точек фигуры перпендикулярно к отрезкам, соединяющим соответствующие точки с мгновенным центром скоростей, в сторону вращения фигуры (рис. 200).

Таким образом, *скорости различных точек плоской фигуры в каждый данный момент времени распределяются так, как если бы фигура вращалась в этот момент времени вокруг мгновенного центра скоростей, занимающего в разные моменты различные положения как относительно движущейся фигуры, так и относительно неподвижной плоскости, в которой движется фигура.*

Если рассматривать не движение плоской фигуры, получающейся от сечения тела плоскостью, параллельной неподвижной, а плоскопараллельное движение самого тела, то скорости его точек в каждый данный момент времени распределяются так, как будто бы тело вращается в этот момент вокруг некоторой, так называемой *мгновенной оси вращения*, проходящей через соответствующий данному моменту мгновенный центр скоростей фигуры и перпендикулярной к ее плоскости. Это следует из того, что при плоскопараллельном движении тела все его точки, лежащие на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости, движутся одинаково. Поэтому все точки тела, лежащие на мгновенной оси вращения, т. е. на прямой, проходящей через мгновенный центр скоростей фигуры и перпендикулярной к ее плоскости, будут в данный момент иметь скорость, равную нулю, а все точки тела, лежащие на перпендикуляре к плоскости фигуры, восставленном в какой-либо другой ее точке, будут иметь такие же скорости, как соответствующая точка фигуры.

Каждому моменту времени (мгновению) соответствует свое положение мгновенного центра скоростей и свое положение мгновенной оси. На это обстоятельство и указывают сами их названия: «мгновенный» центр и «мгновенная» ось.

Заметим, что *нельзя отождествлять вращение тела вокруг мгновенной оси в данный момент с вращением тела вокруг неподвижной оси.*

В последнем случае скорости всех точек тела, лежащих на оси, равны нулю во все время движения тела, и потому их ускорения равны нулю. Точки же тела, совпадающие в данный момент времени с мгновенной осью вращения, имеют скорости, равные нулю, только в этот момент и движутся с ускорением.

Задача 88. Цилиндр, лежащий на горизонтальной плоскости, обмотан веревкой, один конец которой прикреплен к цилиндру, а другой свободен. Найти угловую скорость ω цилиндра, скорость его центра O и скорости концов вертикального и горизонтального диаметров перпендикулярного сечения цилиндра: A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , если свободный конец веревки тянут параллельно плоскости и перпендикулярно к оси цилиндра с постоянной скоростью v_3 (рис. 203) и если цилиндр катится без скольжения.

Решение. Проведем через веревку плоскость, перпендикулярную к оси цилиндра. В сечении получится круг, катящийся по горизонтальной прямой — прямой пересечения проведенной плоскости с горизонтальной плоскостью. Так как этот круг катится без сколь-

жения, то скорость точки A_1 , в которой он касается прямой, равна нулю. Следовательно, эта точка является мгновенным центром скоростей круга. Скорость точки A_3 круга, в которой его касается свободный конец веревки, равна скорости v_3 , с которой тянут веревку. Зная положение мгновенного центра скоростей круга и скорость его одной точки A_3 , находим угловую скорость цилиндра и скорости точек O , A_2 и A_4 :

$$\omega = \frac{v_3}{A_1 A_3} = \frac{v_3}{2r}, \quad v_0 = \omega \cdot A_1 O = \frac{v_3}{2r} r = \frac{v_3}{2},$$

$$v_2 = \omega \cdot A_1 A_2 = \frac{v_3}{2r} \sqrt{2} r^2 = \frac{v \sqrt{2}}{2}, \quad v_4 = \omega \cdot A_1 A_4 = \frac{v_3 \sqrt{2}}{2}.$$

Направления векторов v_0 , v_2 и v_4 показаны на рис. 203.

Задача 89. Определить скорость ползуна B и средней точки M шатуна AB кривошипно-ползунного механизма (рис. 204, а) в момент, когда кривошип OA составляет с линией OB движения ползуна любой угол φ . Вычислить, в частности, скорости этих точек для двух положений механизма, когда $\varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$, полагая $OA = r = 20$ см, $AB = l = 40$ см. Угловая скорость кривошипа постоянна и равна $\omega = 40\pi$ рад/с. Направление его вращения показано на рисунке.

Решение. Направления скоростей двух точек A и B шатуна нам всегда известны. Точка A есть точка шатуна AB , общая

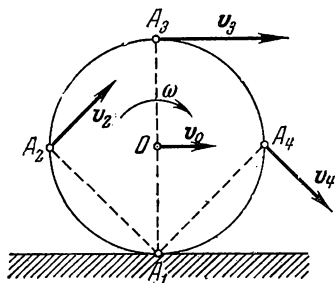


Рис. 203.

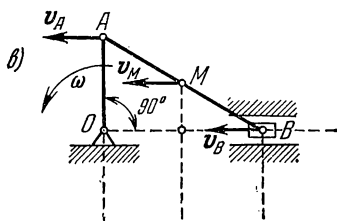
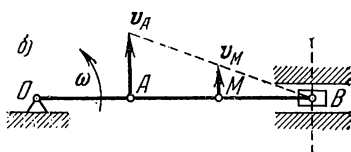
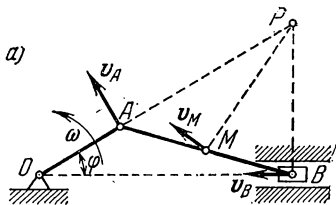


Рис. 204.

с кривошипом OA . Но кривошип совершает вращательное движение, и потому его точка A движется по окружности радиуса OA , и, следовательно, скорость v_A этой точки перпендикулярна к радиусу OA .

Точка B есть точка шатуна, общая с ползуном B . Но ползун может двигаться только поступательно вдоль своих направляющих, и, следовательно, скорость точки B направлена по линии движения OB ползуна. Зная же для данного момента направления скоростей

двух точек шатуна, легко найти и положение его мгновенного центра скоростей. Эта точка P лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных в точках A и B шатуна к направлениям скоростей этих точек (рис. 204, а). Угловая скорость шатуна равна $\omega_{AB} = v_A/AP$, модуль скорости точки M шатуна

$$v_M = \omega_{AB} \cdot MP = \frac{v_A \cdot MP}{AP}.$$

Модуль скорости ползуна (точки B шатуна)

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = \frac{v_A \cdot BP}{AP}.$$

Направлены скорости этих точек перпендикулярно соответственно к отрезкам MP и BP в сторону вращения шатуна (так, как изображено на рис. 204, а). Величину скорости точки A легко вычислить по формуле $v_A = \omega \cdot OA = \omega r$. Зная для данного момента угол φ , всегда можно найти и длины отрезков AP , MP и BP или вычислением (решая соответствующие треугольники), или графически (строая схему механизма в масштабе по заданным размерам его звеньев и углу φ).

Решим теперь ту же задачу для частных случаев, когда $\varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$. Расположение звеньев механизма и направление скорости v_A точки A при угле поворота кривошипа $\varphi = 0$ показано на рис. 204, б. Скорость точки B во всех случаях может быть направлена лишь по линии движения ползуна. Мгновенным центром шатуна AB будет точка B , так как в ней будут в данном случае пересекаться перпендикуляры, восстановленные в точках A и B к скоростям этих точек. Так как точка B находится в данный момент в мгновенном центре, то скорость этой точки (скорость ползуна) равна нулю (механизм находится в «мертвом» положении). Угловая скорость шатуна

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{AB}.$$

Скорость точки M шатуна

$$\begin{aligned} v_M &= \omega_{AB} \cdot MP = \omega_{AB} \cdot MB = \frac{v_A \cdot MB}{AB} = \frac{\omega r \frac{1}{2}}{l} = \\ &= \frac{\omega r}{2} = \frac{40\pi \cdot 20}{2} = 400\pi \text{ см/с.} \end{aligned}$$

Расположение механизма и направления скоростей v_A и v_B при угле поворота кривошипа $\varphi = 90^\circ$ показано на рис. 204, в. Так как скорости v_A и v_B параллельны и точки A и B не лежат на одном перпендикуляре к направлениям этих скоростей, то в данный момент мгновенный центр скоростей шатуна AB лежит в бесконечности, его угловая скорость $\omega_{AB} = 0$ и он совершает мгновенное поступательное движение. Следовательно, в данный момент

$$v_B = v_M = v_A = \omega r = 40\pi \cdot 20 = 800\pi \text{ см/с.}$$

Задача 90. Две параллельные рейки движутся в разные стороны с постоянными скоростями v_1 и v_2 (рис. 205). Между рейками зажат диск радиусом r , катящийся по рейкам без скольжения. Найти угловую скорость диска и скорость его центра O , если $v_1 > v_2$.

Решение. Так как диск катится по рейкам без скольжения, то скорость его точки A , в которой диск соприкасается с верхней рейкой, равна скорости этой рейки v_1 . На том же основании скорость точки B диска равна скорости нижней рейки v_2 . Так как скорости двух точек A и B диска параллельны, а сами точки лежат на одном перпендикуляре к скоростям этих точек, то мгновенный центр P скоростей диска определится как точка пересечения прямой AB с прямой, соединяющей концы векторов скоростей точек A и B .

Из подобия треугольников (это вытекает и из пропорциональности скоростей точек плоской фигуры их расстояниям от мгновенного центра) имеем $AP/BP = v_1/v_2$. С другой стороны, $AP + BP = AB = 2r$. Решая эти два уравнения совместно, находим

$$BP = \frac{2rv_2}{v_1 + v_2}.$$

Угловая скорость диска $\omega = \frac{v_2}{BP} = v_2 : \frac{2rv_2}{v_1 + v_2} = \frac{v_1 + v_2}{2r}$. Чтобы определить скорость центра O диска, вычисляем сначала расстояние этой точки от мгновенного центра P :

$$OP = OB - BP = r - \frac{2rv_2}{v_1 + v_2} = \frac{r(v_1 - v_2)}{v_1 + v_2}.$$

Скорость центра O диска

$$v_O = \omega \cdot OP = \frac{v_1 + v_2}{2r} \cdot \frac{r(v_1 - v_2)}{v_1 + v_2} = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

§ 78*. Сложение вращений вокруг параллельных осей

Пусть какое-либо твердое тело K (например, шар, рис. 206, а) вращается вокруг некоторой оси z_1 (относительное вращение), которая в свою очередь вращается вокруг параллельной ей неподвижной оси z_2 (переносное вращение).

Очевидно, что при этом все точки тела будут двигаться в плоскостях, перпендикулярных к параллельным осям z_1 и z_2 , и потому любая из этих плоскостей может быть принята за неподвижную, параллельно которой движутся все точки тела. Таким образом, *абсолютное*

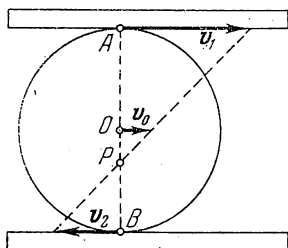


Рис. 205.

движение тела, участвующего в двух вращениях вокруг параллельных осей, есть частный случай плоскопараллельного движения тела, и для его определения достаточно рассмотреть движение плоской фигуры S (рис. 206, б), являющейся сечением тела плоскостью, перпендикулярной к данным осям.

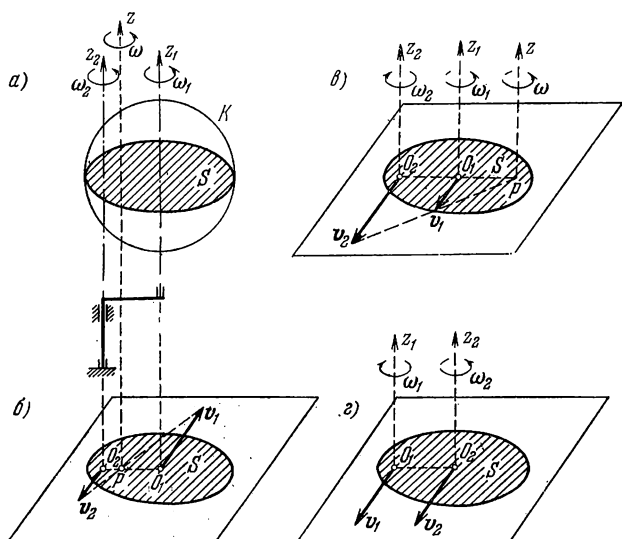


Рис. 206.

Движение же плоской фигуры в ее плоскости можно, как известно, рассматривать в каждый данный момент как вращательное движение этой фигуры вокруг соответствующего этому моменту мгновенного центра с некоторой абсолютной угловой скоростью ω . При определении положения мгновенного центра скоростей фигуры и ее абсолютной угловой скорости могут быть три случая, каждый из которых мы и рассмотрим.

I случай. Оба вращения направлены в одну сторону (рис. 206, а).

Обозначим следы осей z_1 и z_2 в плоскости фигуры S точками O_1 и O_2 ¹⁾. Точка O_1 находится на оси z_1 и по-

¹⁾ Точка O_2 может оказаться лежащей и вне контура данной фигуры S . Тогда ее надо мысленно связать неизменно с этой фигурой.

тму имеет скорость только от вращения вокруг оси z_2 . Ее скорость $v_1 = \omega_2 \cdot O_1O_2$. Точка O_2 лежит на продолжении оси z_2 и потому имеет скорость только от вращения вокруг оси z_1 . Ее скорость $v_2 = \omega_1 \cdot O_1O_2$.

Таким образом, мы получили, что скорости двух точек фигуры S параллельны, а сами точки лежат на одном перпендикуляре к направлению скоростей (рис. 206, б). В соответствии со сказанным на стр. 302 мгновенный центр P скоростей фигуры лежит в этом случае на прямой O_1O_2 и отстоит от точек O_1 и O_2 на расстояниях, прямо пропорциональных скоростям этих точек:

$$\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2 \cdot O_1O_2}{\omega_1 \cdot O_1O_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Так как при плоскопараллельном движении тела все точки его, лежащие на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости, движутся одинаково, то будут равны нулю и скорости всех точек прямой z , параллельной данным осям и проходящей через найденный мгновенный центр P . Эта прямая будет для данного тела K мгновенной осью, вращение вокруг которой в данный момент представляет собой абсолютное движение этого тела. Определим теперь угловую скорость ω вращения тела вокруг мгновенной оси, т. е. абсолютную угловую скорость тела.

По формуле (118)

$$\omega = \frac{v_2}{PO_2} = \frac{v_1}{PO_1}, \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\omega_1 \cdot O_1O_2}{PO_2} = \frac{\omega_2 \cdot O_1O_2}{PO_1}.$$

Отсюда находим $\omega \cdot PO_2 = \omega_1 \cdot O_1O_2$ и $\omega \cdot PO_1 = \omega_2 \cdot O_1O_2$. Складывая почленно обе части последних равенств, получаем

$$\omega_1 \cdot O_1O_2 + \omega_2 \cdot O_1O_2 = \omega(PO_2 + PO_1) = \omega \cdot O_1O_2,$$

откуда

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Так как скорости v_1 и v_2 точек O_1 и O_2 при вращении вокруг мгновенного центра P должны быть, очевидно, направлены так же, как и при вращении вокруг осей z_2 и z_1 , то вращение тела вокруг мгновенной оси должно совершаться (рис. 206) в том же направлении.

Таким образом, приходим к следующему результату.

1. Два вращения, происходящих вокруг параллельных осей в одну сторону, можно в каждый данный момент заменить одним вращением, происходящим в ту же сторону вокруг мгновенной оси, параллельной данным осям, лежащей в одной плоскости с ними и делящей расстояние между ними на части, обратно пропорциональные угловым скоростям составляющих вращений:

$$\frac{PO_2}{PO_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (120)$$

2. Абсолютная угловая скорость тела равна сумме угловых скоростей составляющих вращений:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \quad (121)$$

Если отношение угловых скоростей $\omega_1/\omega_2 = PO_2/PO_1$ постоянно, а также постоянно и расстояние O_1O_2 , то мгновенная ось вращения будет находиться от неподвижной оси z_2 на неизменном расстоянии PO_2 . Но сам отрезок O_1O_2 при движении тела вращается вокруг неподвижного центра O_2 , и потому мгновенная ось вращения непрерывно изменяет свое положение в пространстве.

II случай. Оба вращения направлены в разные стороны с различной угловой скоростью.

Представим себе, как и в предыдущем случае, плоскость, перпендикулярную к данным параллельным осям, и движущуюся в ней плоскую фигуру S (рис. 206, в), являющуюся сечением тела этой плоскостью. Пусть вращение тела вокруг оси z_1 , проходящей через точку O_1 фигуры, происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси z_1 , с угловой скоростью ω_1 , вращение же тела вокруг оси z_2 , проходящей через точку O_2 , происходит по часовой стрелке с угловой скоростью ω_2 . Пусть при этом $\omega_1 > \omega_2$.

Рассуждая, как и в предыдущем случае, мы получим, что скорость точки O_1 равна $v_1 = \omega_2 \cdot O_1O_2$ и скорость точки O_2 равна $v_2 = \omega_1 \cdot O_1O_2$. Скорости этих точек также параллельны, но только направлены уже в одну сторону (рис. 206, в). Мгновенный центр P скоростей фигуры лежит в этом случае на продолжении линии O_1O_2 за осью с большей угловой скоростью и отстоит от точек O_1 и O_2

на расстояниях, пропорциональных скоростям этих точек:

$$\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2 \cdot O_1O_2}{\omega_1 \cdot O_1O_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Прямая z , параллельная данным осям и проходящая через мгновенный центр скоростей P , будет мгновенной осью вращения.

Для определения абсолютной угловой скорости ω , т. е. угловой скорости вращения тела вокруг мгновенной оси z , воспользуемся формулой (118):

$$\omega = \frac{v_2}{PO_2} = \frac{v_1}{PO_1}, \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\omega_1 \cdot O_1O_2}{PO_2} = \frac{\omega_2 \cdot O_1O_2}{PO_1}.$$

Отсюда находим $\omega \cdot PO_2 = \omega_1 \cdot O_1O_2$ и $\omega \cdot PO_1 = \omega_2 \cdot O_1O_2$. Вычитая почленно из первого равенства второе получаем

$$\omega (PO_2 - PO_1) = \omega_1 \cdot O_1O_2 - \omega_2 \cdot O_1O_2,$$

или

$$\omega \cdot O_1O_2 = (\omega_1 - \omega_2) \cdot O_1O_2,$$

откуда $\omega = \omega_1 - \omega_2$.

Так как при вращении тела вокруг мгновенной оси z направления скоростей v_1 и v_2 точек O_1 и O_2 должны быть такими же, как и при вращении этих точек вокруг осей z_2 и z_1 , то вращение тела вокруг мгновенной оси должно совершаться (как это видно из рис. 206, в) в сторону вращения с большей угловой скоростью.

Таким образом, мы приходим к выводу:

1. Два вращения, происходящие вокруг параллельных осей в разные стороны с различными угловыми скоростями, можно заменить в каждый данный момент одним вращением, происходящим вокруг мгновенной оси, параллельной данным, в сторону вращения с большей угловой скоростью. Мгновенная ось сложного вращения лежит в одной плоскости с данными осями за осью с большей угловой скоростью и отстоит от данных осей на расстояниях, обратно пропорциональных угловым скоростям составляющих вращений:

$$\frac{PO_2}{PO_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (122)$$

2. Абсолютная угловая скорость тела равна при этом разности угловых скоростей составляющих вращений:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2. \quad (123)$$

III случай. Оба вращения направлены в разные стороны, а их угловые скорости равны по численному значению.

Выше было найдено, что при сложении двух вращений вокруг параллельных осей, происходящих в противоположные стороны с различными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , положение мгновенной оси вращения и величина абсолютной угловой скорости ω определяются формулами (122) и (123):

$$\frac{PO_2}{PO_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

и

$$\omega = \omega_1 - \omega_2.$$

Вычтя по единице из обеих частей первого равенства, будем иметь

$$\frac{PO_2}{PO_1} - 1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1,$$

откуда

$$\frac{PO_2 - PO_1}{PO_1} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}$$

и

$$\frac{O_2O_1}{PO_1} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}.$$

Следовательно, расстояние мгновенной оси вращения (проходящей через мгновенный центр P) от оси относительного вращения (проходящей через точку O_1) будет равно

$$PO_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \cdot O_1O_2.$$

Представим себе, что угловая скорость ω_2 переносного вращения будет неограниченно приближаться к угловой скорости ω_1 относительного вращения. Тогда в пределе при $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ будем иметь для абсолютной угловой скорости тела

$$\omega = \lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} (\omega_1 - \omega_2) = 0.$$

Расстояние мгновенной оси до оси относительного вращения

$$PO_1 = \lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} \frac{O_2O_1 \cdot \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} = \infty.$$

В § 77 было установлено, что в этом случае плоско-параллельное движение тела является поступательным и, следовательно, скорости всех его точек в каждый данный момент равны между собой. В этом можно убедиться и другим путем.

Опять представим себе плоскость, перпендикулярную данным параллельным осям, и движущуюся в ней плоскую фигуру (рис. 206, з), являющуюся сечением тела этой плоскостью. Пусть вращения тела вокруг оси z_1 , проходящей через точку O_1 , и оси z_2 , проходящей через точку O_2 , направлены в противоположные стороны и угловые скорости этих вращений равны по численному значению:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

Рассуждая так же, как и в предыдущих случаях, найдем, что скорости точек O_1 и O_2 параллельны, направлены в одну сторону (рис. 206, з) и равны по модулю:

$$v_1 = \omega \cdot O_1O_2 \quad \text{и} \quad v_2 = \omega \cdot O_1O_2.$$

Но если две точки плоской фигуры имеют одинаковые по модулю и направлению скорости, то движение тела в данный момент будет поступательным¹⁾. Все остальные точки тела будут иметь такие же скорости.

Скорость поступательного движения тела равна скорости любой его точки, т. е. в данном случае равна произведению угловой скорости ω на расстояние O_1O_2 между параллельными осями.

Таким образом, приходим к следующему выводу:

1. *Два вращения тела, происходящие вокруг параллельных осей в разные стороны с равными угловыми скоростями, можно заменить в данный момент одним поступательным его движением, происходящим в направлении, перпендикулярном к плоскости, проведенной через оси составляющих вращений.*

2. *Модуль скорости поступательного движения тела равен при этом в данный момент произведению угловой скорости ω одного из вращений на кратчайшее расстояние O_2O_1 между осями составляющих вращений:*

$$v = \omega \cdot O_2O_1. \quad (124)$$

¹⁾ Мгновенно поступательным, если в дальнейшем не будет сохраняться равенство между составляющими угловыми скоростями или если будет изменяться направление одного из вращений.

Рассмотренный особый случай сложения двух вращений тела, очевидно, аналогичен особому случаю двух равных по модулю параллельных сил, направленных в разные стороны, т. е. случаю пары сил. По аналогии с последней случай сложения двух вращений, происходящих вокруг параллельных осей в разные стороны с равными по модулю угловыми скоростями, называется *парой вращений*. Так же как пару сил нельзя заменить

одной силой, так и пару вращений нельзя заменить одним вращательным движением¹⁾.

Простым примером пары вращений, позволяющим еще раз наглядно убедиться в ее свойстве, может служить движение педали велосипеда. Удерживаемая ногой в горизонтальном положении педаль AB (рис. 207) со-

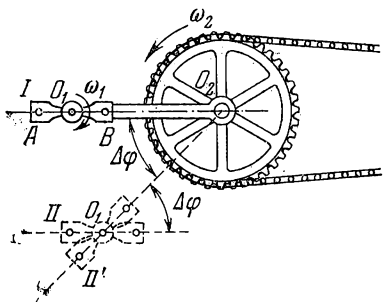


Рис. 207.

вершает относительно рамы велосипеда поступательное движение. Вместе с тем это движение можно рассматривать как результат сложения двух происходящих в противоположные стороны с равными угловыми скоростями вращений вокруг параллельных осей: относительного вращения педали вокруг оси O_1 и переносного вращения ее вместе с кривошипом O_2O_1 вокруг оси O_2 , неподвижной относительно рамы велосипеда. В самом деле, пусть за некоторый промежуток времени Δt кривошип O_2O_1 повернется (в указанном на рис. 207 направлении) на угол $\Delta\phi$ из положения I в положение II . Если бы педаль была жестко связана с кривошипом, то она заняла бы положение II' (ее линия AB лежала бы на продолжении линии O_2O_1 кривошипа). Но наличие оси O_1 дает возможность педали оставаться и в новом положении горизонтальной, повернувшись при этом вокруг оси O_1 в направлении, противоположном направлению вращения кривошипа, на угол, равный (как накрест лежащий)

¹⁾ Подобно тому как вращательное действие пары сил характеризуется ее моментом, так и скорость поступательного движения тела, являющегося результатом пары вращений, определяется моментом этой пары.

углу $\Delta\varphi$. Так как при любом перемещении педали угол поворота кривошипа вокруг оси O_2 будет равен углу поворота педали вокруг оси O_1 , то и переносная угловая скорость ω_2 педали будет равна по модулю в любой момент ее относительной угловой скорости ω_1 , направления же их противоположны.

§ 79*. Угловая скорость как вектор. Аналогия между сложением угловых скоростей и сложением сил

Исследование сложного вращательного движения тела значительно упрощается, если условиться рассматривать его угловую скорость как векторную величину, связанную с осью вращения тела.

Вектором ω угловой скорости называется вектор, направленный вдоль оси вращения так, чтобы, смотря с конца этого вектора, видеть вращение тела совершающимся против часовой стрелки (рис. 208). Модуль этого вектора равен абсолютной величине угловой скорости тела $\omega = |d\varphi/dt|$. Вектор ω есть скользящий вектор, т. е. за точку его приложения можно брать любую точку на оси вращения тела.

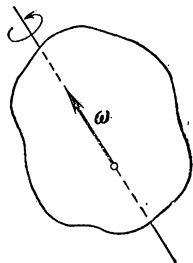


Рис. 208.

Задание вектора ω угловой скорости тела полностью определяет вращательное движение тела, так как позволяет нам знать положение оси вращения тела, сторону вращения и численное значение угловой скорости. Право считать угловую скорость векторной величиной подтверждается (конечно, только косвенным образом) полной аналогией между доказанными в предыдущем параграфе правилами сложения вращений вокруг параллельных осей и соответствующими правилами сложения параллельных сил.

Пусть какое-либо тело K вращается вокруг оси z_1 с некоторой угловой скоростью ω_1 , а ось z_1 в свою очередь вращается вокруг параллельной ей неподвижной оси z_2 (рис. 206, а) с некоторой угловой скоростью ω_2 .

Приняв какой-либо масштаб для угловых скоростей, изобразим, пользуясь установленным выше правилом, угловые скорости в виде векторов ω_1 и ω_2 , направив их вдоль соответствующих осей вращения из каких-либо точек O_1 и O_2 (рис. 209, а — для случая, когда вращения

направлены в одну сторону, и рис. 209, б — для случая, когда вращения направлены в противоположные стороны и угловые скорости не равны по модулю).

В обоих случаях, изображенных на рис. 209, два вращения тела вокруг параллельных осей можно заменить одним вращением с угловой скоростью, модуль, линия действия и направление вектора ω которой определяются

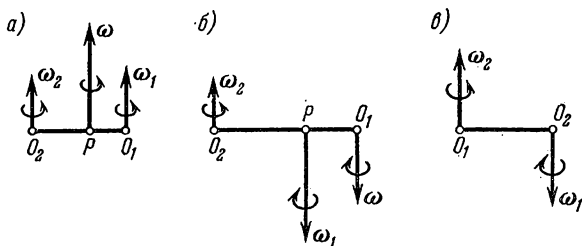


Рис. 209.

правилами, аналогичными правилам, установленным в статике для сложения параллельных сил, направленных в одну и в противоположные стороны (см. стр. 75 и 77—78).

1. Если оба вращения направлены в одну сторону,

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{и} \quad \frac{PO_2}{PO_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

2. Если оба вращения направлены в противоположные стороны и угловые скорости не равны,

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad \text{и} \quad \frac{PO_2}{PO_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

(Вектор ω лежит за осью с большей угловой скоростью и направлен в сторону большей угловой скорости.)

Если оба вращения направлены в противоположные стороны и угловые скорости их равны по модулю ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) (рис. 209, в), то их нельзя заменить одним вращением (так же как и пару сил, т. е. две равные по модулю и направленные в противоположные стороны параллельные силы, нельзя заменить одной равнодействующей). Здесь мы имеем особый случай, называемый по аналогии *парой вращений*.

Пара вращений (как это было показано в предыдущем параграфе) сообщает телу поступательное движение

ние в направлении, перпендикулярном плоскости, проведенной через оси составляющих вращений. Модуль скорости этого поступательного движения $v = \omega \cdot O_1O_2$.

§ 80. Планетарные и дифференциальные передачи

Планетарными и дифференциальными передачами называются механизмы, в которых имеются колеса с подвижными осями, вращающимися вместе с так называемым водилом (Н на рис. 210) вокруг неподвижной оси.

Колеса, геометрические оси которых неподвижны, называются центральными.

Колеса с подвижными геометрическими осями называются сателлитами.

Колеса с подвижными осями (2 и 3 на рис. 210) совершают сложное движение, вращаясь одновременно вокруг своих осей (O_2 и O_3), закрепленных на водиле, и вместе с водилом вокруг его неподвижной оси O_1 . Движение этих колес подобно движению планет солнечной системы почему они и получили название сателлитов (спутников), а сам механизм — название планетарного механизма. По тем же соображениям центральное колесо называют иногда солнечным.

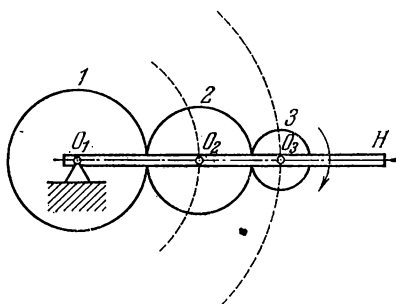


Рис. 210.

Планетарные механизмы, в которых одно из центральных колес неподвижно, называются простыми планетарными передачами или, чаще, просто планетарными передачами.

В отличие от простых планетарных передач, планетарные механизмы, в которых нет неподвижных колес, называются дифференциальными передачами или просто дифференциалами.

В дифференциальных передачах одно из центральных колес получает вращение вокруг своей неподвижной оси независимо от вращения водила, т. е. получает его от другого источника. Такие передачи, как говорят, имеют две степени свободы.

Кинематический расчет таких передач можно производить различными способами, показанными ниже на примере решения задач 91 и 92.

1 и 3. Обкатываясь по неподвижному колесу 1 (зацепление колес 1 и 2 внутреннее), колесо 2 приводит во вращение колесо 3, жестко закрепленное на ведомом валу III. Числа зубцов колес равны: $z_1 = 70$ и $z_3 = 30$. Определить абсолютную угловую скорость колеса 3 (ведомого вала III).

1-й способ (с помощью мгновенных центров скоростей). Обозначим радиусы начальных окружностей зубчатых колес соответственно через r_1 , r_2 и r_3 . Так как закрепленная на водиле H ось II колеса 2 совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси I водила, то скорость точек, лежащих на этой оси,

С другой стороны, колесо 2, обкатываясь по начальной окружности неподвижного колеса 1, совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей колеса 2 лежит в точке P его касания начальной окружности неподвижного колеса 1. Скорости различных точек колеса 2 пропорциональны их расстояниям до мгно-

венного центра скоростей. Следовательно, скорость v_A точки A (общей точки колес 2 и 3) найдется из пропорции $\frac{v_A}{v_{O_2}} = \frac{AP}{O_2P} = \frac{2r_2}{r_2}$, откуда $v_A = 2v_{O_2} = 2\omega_H(r_2 + r_3)$. Абсолютная угловая скорость ω_3 колеса 3 (ведомого вала)

$$\omega_3 = \frac{v_A}{r_3} = \omega_H \frac{2(r_2 + r_3)}{r_3} = \omega_H \frac{r_3 + (r_3 + 2r_2)}{r_3} = \omega_H \frac{r_3 + r_1}{r_3} = \omega_H \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right).$$

Так как радиусы начальных окружностей зубчатых колес, находящихся в зацеплении, пропорциональны числам их зубцов, то окончательно получаем

$$\omega_3 = \omega_H \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right) = \omega_H \left(1 + \frac{z_1}{z_3}\right) = 15 \left(1 + \frac{70}{30}\right) = 50 \text{ рад/с.}$$

2-й способ (способ сложения угловых скоростей). Абсолютное движение колеса 3 можно считать составленным из двух вращений: вращения этого колеса относительно подвижного водила H с относительной угловой скоростью $\omega_{3 \text{ отн}}$ и его вращения вместе с водилом относительно неподвижной оси с переносной угловой скоростью $\omega_{3 \text{ пер}} = \omega_H$.

Зависимость между относительными угловыми скоростями колес (т. е. между угловыми скоростями колес относительно подвижного водила) определяется так же, как и для колес с неподвижными осями, из передаточного отношения

$$i_{31} = \frac{\omega_{3 \text{ отн}}}{\omega_{1 \text{ отн}}} = -\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} = -\frac{z_1}{z_3}.$$

(колесо 2 паразитное и не влияет на величину передаточного отношения). Отсюда

$$\omega_{3 \text{ отн}} = -\frac{z_1}{z_3} \omega_{1 \text{ отн}}.$$

Абсолютная угловая скорость неподвижного колеса 1 равна нулю. Относительную же угловую скорость $\omega_{1 \text{ отн}}$ этого колеса можно найти из следующих соображений. Если связать наблюдателя с водилом (подвижной системой отсчета), то при вращении водила с угловой скоростью ω_H в одном направлении любой радиус колеса 1 будет представляться этому наблюдателю вращающимся по отношению к водилу в противоположном направлении с той же самой угловой скоростью $\omega_{1 \text{ отн}} = \omega_H$. Следовательно,

$$\omega_{3 \text{ отн}} = \omega_{1 \text{ отн}} \frac{z_1}{z_3} = \omega_H \frac{z_1}{z_3}.$$

Из рис. 211 нетрудно видеть, что относительное вращение колеса 3 будет происходить в том же направлении, что и его переносное вращение (вращение водила). Следовательно, мы имеем случай сложения двух вращений, происходящих вокруг параллельных

осей в одну и ту же сторону (§ 78, стр. 319). В этом случае

$$\omega_3 = \omega_{3 \text{ пер}} + \omega_{3 \text{ отн}} = \omega_H + \omega_H \frac{z_1}{z_3} = \omega_H \left(1 + \frac{z_1}{z_3} \right).$$

3-й способ (способ «остановки», или способ Виллиса). Предложенный английским ученым Виллисом способ заключается в следующем. Мысленно остановим водило, сообщив основанию механизма и всем его звеньям вращение с угловой скоростью, равной по модулю и противоположной по направлению угловой скорости ω_H водила. Тогда водило и оси всех закрепленных на нем колес можно рассматривать как неподвижные, а планетарную передачу — как обычную многоступенчатую зубчатую передачу. При этом угловые скорости всех колес получившейся зубчатой передачи с неподвижными осями будут равны разности своих фактических угловых скоростей и угловой скорости водила.

Таким образом, мы получаем следующую формулу (*формулу Виллиса*) для передаточного отношения планетарной (и дифференциальной) цилиндрической зубчатой передачи:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_n - \omega_H} = (-1)^k |i_{1n}|. \quad (125)$$

В этой формуле ω_1 и ω_n — алгебраические значения угловых скоростей 1-го и n -го колеса. Принимая угловую скорость водила за положительную величину, будем считать угловую скорость колеса также положительной, если оно вращается в ту же сторону, что и водило, и отрицательной, если оно вращается в противоположную сторону. ω_H — угловая скорость водила, k — число внешних зацеплений колес и i_{1n} — передаточное отношение зубчатой передачи с неподвижными осями.

По условиям данной задачи $\omega_1 = 0$, $k = 1$. Подставляя эти значения в формулу (125), будем иметь

$$\frac{0 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = - \frac{z_3}{z_1}.$$

Решая это уравнение, находим

$$\omega_3 = \omega_H \left(1 + \frac{z_1}{z_3} \right) = 15 \left(1 + \frac{70}{30} \right) = 50 \text{ рад/с}.$$

Так как найденное значение угловой скорости колеса 3 получилось положительным, то оно вращается в ту же сторону, что и водило.

Как видим, метод «остановки» дает наиболее короткое и простое решение задачи. Им обычно и пользуются на практике для кинематического расчета планетарных и дифференциальных механизмов.

Задача 92. Решить предыдущую задачу при условии, что изображенный на схеме (рис. 211) механизм является дифференциальным, т. е. его центральное колесо 1 получает вращение независимо от вращения водила H с угловой скоростью $\omega_1 = 24$ рад/с. Решить задачу для двух случаев: 1) колесо 1 вращается в ту же сторону, что и водило, и 2) колесо 1 вращается в сторону, противоположную направлению вращения водила.

Решение. По формуле (125) Виллиса $\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = (-1)^k |i_{13}|$.

В нашем случае $k = 1$, $|i_{13}| = \frac{z_3}{z_1}$, откуда $\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_3}{z_1}$ и

$$\omega_3 = \omega_H \left(1 + \frac{z_1}{z_3}\right) - \omega_1 \frac{z_1}{z_3}.$$

Для определения угловой скорости ω_3 третьего колеса (ведомого вала) в полученное выражение надо подставить $\omega_H = 15$ рад/с, $\frac{z_1}{z_3} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3}$ и алгебраическое значение угловой скорости первого колеса $\omega_1 = 24$ рад/с (когда это колесо вращается в ту же сторону, что и водило) или $\omega_1 = -24$ рад/с (когда первое колесо вращается в сторону, противоположную направлению вращения водила).

Подставляя данные значения в найденное выше выражение для угловой скорости третьего колеса, находим:

1. Если колесо вращается в ту же сторону, что и водило,

$$\omega_3 = 15 \left(1 + \frac{7}{3}\right) - 24 \cdot \frac{7}{3} = -6 \text{ рад/с.}$$

Следовательно, в этом случае колесо 3 вращается в сторону, противоположную направлению вращения водила, с угловой скоростью в 6 рад/с.

2. Если колесо вращается в сторону, противоположную направлению вращения водила, то

$$\omega_3 = 15 \left(1 + \frac{7}{3}\right) - (-24) \cdot \frac{7}{3} = 106 \text{ рад/с.}$$

Следовательно, в этом случае колесо 3 вращается в ту же сторону, что и водило, с угловой скоростью в 106 рад/с.

РАЗДЕЛ III

ДИНАМИКА

ГЛАВА XVII

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ

§ 81. Предмет динамики и ее две основные задачи

Динамикой называется раздел теоретической механики, изучающий зависимость между механическим движением тел и действующими на них силами.

Всякое механическое движение тела рассматривается в динамике в связи с физическими факторами, определяющими характер этого движения. В этом отличие динамики от кинематики, где движение рассматривается только с геометрической стороны.

Изучение динамики начинается обычно с изучения движения наиболее простого объекта — материальной точки.

Материальной точкой, как известно (стр. 12), называется такое материальное тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Напомним, что мы можем принимать за материальную точку не только тело исчезающе малых размеров, но иногда и тело конечных (и, может быть, весьма больших) размеров, если только в условиях данного исследования эти размеры не имеют значения. Например, при поступательном движении тела все его точки движутся, как мы знаем, одинаково, и для определения движения тела достаточно знать движение какой-либо одной его точки, в частности центра тяжести тела. В дальнейшем же будет доказано, что центр масс¹⁾ тела движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса тела и к которой приложены все действующие

¹⁾ С понятием центра масс мы познакомимся ниже, в § 100.

на него силы. Поэтому *поступательно движущееся тело можно принимать в динамике за движущуюся материальную точку, имеющую массу, равную массе этого тела.*

В тех же случаях, когда размерами движущегося (не поступательно) тела пренебречь нельзя, мы можем мысленно разделить его на отдельные, малые сравнительно с расстояниями, играющими роль в данной задаче, части и принять их за материальные точки. Следовательно, всякое тело и любую комбинацию связанных между собой тел можно рассматривать как совокупность материальных точек.

Мысленно выделенная совокупность взаимодействующих между собой материальных точек называется механической системой материальных точек или просто системой.

Абсолютно твердое тело можно также рассматривать как систему материальных точек, расстояния между которыми не изменяются ни при каких условиях, т. е. как неизменяемую систему.

Множество частных задач динамики можно разбить на две основные группы, свести к двум основным задачам.

Первая задача динамики. Известно движение данной материальной точки или данной системы. Требуется определить силы, действующие на эту точку или эту систему.

Вторая задача динамики (обратная первой). Известны силы, действующие на данную материальную точку или данную систему. Требуется определить движение этой точки или этой системы.

Для решения этих задач в динамике пользуются как установленными в статике способами сложения сил и приведения их систем к простейшему виду, так и принятыми в кинематике характеристиками и приемами описания различных движений. Однако для установления связи между движением материальных тел и факторами, определяющими его характер, этого оказывается недостаточно, и потому в динамике пользуются еще и рядом других физических понятий (масса, количество движения, работа, энергия и т. д.). Количественные соотношения между различными физическими величинами, связанными с механическим движением материальных тел, устанавливаются в динамике путем математи-

ческих выводов из основных законов классической механики.

Эти законы служат фундаментом, на котором строится все содержание динамики, и потому с них мы и начнем изучение основ динамики.

§ 82. Основные законы динамики

Первый закон (закон инерции)

Этот закон уже рассматривался нами во введении в механику (§ 3, стр. 19—21). Отметим только одно обстоятельство, имеющее важнейшее принципиальное значение для классической динамики.

Из кинематики мы знаем, что понятия движения и покоя являются относительными, что, относя одно и то же движение к различным системам отсчета, мы можем наблюдать, вообще говоря, совершенно различные движения. Так, например, тело, находящееся в покое на палубе речного парохода или движущееся по ней прямолинейно и равномерно, будет двигаться по отношению к берегам реки уже непрямолинейно и неравномерно при изменении направления и модуля скорости парохода. В этом случае, применяя к наблюдаемым движениям данного тела закон инерции, наблюдатель, стоящий на палубе парохода, и наблюдатель, стоящий на берегу реки, сделают противоположные выводы. Первый — об уравниваемости сил, приложенных к данному телу, второй — об отсутствии равновесия.

Отсюда следует, что; применяя законы классической динамики, нужно прежде всего решить вопрос о том, для какой системы отсчета эти законы и, в частности, закон инерции применимы вообще.

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется основной или инерциальной системой, а движение, наблюдаемое по отношению к этой системе, называется абсолютным.

В кинематике мы рассматривали движение тел вне связи с силами, на них действующими, и потому любую систему отсчета можно было принять за неподвижную и движение относительно нее рассматривать как абсолютное. Другое дело в динамике. Ее предметом служит связь между наблюдаемым движением тел и действующими на

них силами, связь же эта зависит от выбора системы отсчета.

Излагая основные законы классической механики, Ньютон указывал, что они относятся к абсолютному движению, под которым он понимал движение в некотором абсолютном пространстве. Он писал: «Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным... Абсолютное движение есть перемещение тела из одного его абсолютного места в другое». Ясно, что с точки зрения диалектического материализма и современного состояния науки понятие абсолютно неподвижного, не связанного с материей, «пустого» пространства не отвечает действительности. Так как абсолютно неподвижных тел в природе не существует, то не существует и такой системы отсчета, по отношению к которой мы могли бы считать движение абсолютным в ньютоновском понимании этого слова.

Однако все же можно найти такую систему отсчета, которая может быть принята практически за неподвижную для всех тел нашей солнечной системы.

Если поместить начало координат в центре Солнца, точнее, в центре масс солнечной системы, а координатные оси направить на какие-нибудь три «неподвижные» (называемые так в отличие от заметно движущихся планет нашей солнечной системы) звезды, то получится система координат, называемая *гелиоцентрической*.

Опыт и наблюдения показывают, что для движений (со скоростями, значительно меньшими скорости света), отнесенных к гелиоцентрической системе координат, закон инерции выполняется с очень большой степенью точности, и потому такая система отсчета может быть принята за инерциальную.

Если материальная точка движется относительно инерциальной системы отсчета по инерции (т. е. прямолинейно и равномерно) с какой-либо абсолютной скоростью v , то таким же будет движение данной точки относительно любой другой системы отсчета, движущейся относительно инерциальной поступательно, прямолинейно и равномерно со скоростью $v_{\text{пер}}$.

В самом деле. Как это следует из теоремы о сложении скоростей, относительная скорость точки $v_{\text{отн}} = v - v_{\text{пер}}$. Но в данном случае v и $v_{\text{пер}}$ суть постоянные

векторы, следовательно, постоянными будет и вектор $v_{отн.}$

Отсюда следует, что *любая система отсчета, совершающая относительно инерциальной системы поступательное, прямолинейное и равномерное движение, будет также инерциальной системой.* Всякая же система отсчета, движущаяся относительно инерциальной непрямолинейно или хотя бы и прямолинейно, но неравномерно, уже не будет инерциальной системой.

Так как Земля движется вокруг Солнца по некоторой криволинейной орбите, вращаясь при этом вокруг своей оси, то, строго говоря, система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной системой. Однако, вследствие малой кривизны земной орбиты¹⁾ и малой угловой скорости вращения Земли вокруг ее оси (один оборот за сутки), *в подавляющем большинстве задач динамики, с которыми приходится иметь дело в обычной технической практике, можно с вполне достаточной точностью считать инерциальной систему отсчета, неподвижную относительно Земли.* Поправки приходится при этом вводить лишь в тех сравнительно редких случаях, когда вращением Земли пренебрегать нельзя: в задачах артиллерии и ракет дальнего действия, при изучении морских и воздушных течений и некоторых других, очень быстрых или длящихся очень долго, движений.

Второй закон (основной закон динамики)

Ускорение, сообщаемое материальной точке приложенной к ней силой, пропорционально модулю этой силы и совпадает с ней по направлению.

Необходимо иметь в виду, что формулировкой закона предполагается, что точка, к которой приложена данная сила, совершенно свободна, т. е. не встречает никаких препятствий своему движению²⁾.

Требуется подчеркнуть, что *с направлением силы всегда совпадает направление ускорения, а не направление самого движения* (направление скорости). Направление

¹⁾ За час Земля описывает вокруг Солнца дугу, лишь немногим большую $2'$.

²⁾ Под приложенной к точке силой надо понимать, как мы увидим дальше, равнодействующую всех действующих на нее сил (в том числе и сил реакций связей, если точка не свободна).

движения может и не совпадать с направлением приложенной к точке силы. Так, точка, брошенная в пустоте под углом к горизонту, движется при полете по кривой линии (параболе), все время изменяя направление своего движения, тогда как действующая на точку сила тяжести (и сообщаемое ею ускорение) всегда направлена по вертикали вниз.

Направление движения будет совпадать с направлением силы лишь в том случае, если она действует на свободную точку, находившуюся первоначально в покое. Если же точка уже находилась в движении, то сообщаемое данной силой ускорение лишь изменяет ее скорость, направление же скорости может при этом и не совпадать с направлением силы.

Из повседневного опыта известно, что одна и та же сила сообщает различным телам (даже если они одинаковы по форме и размерам, но различны по своему веществу) неодинаковые ускорения. Модули ускорений, приобретаемых различными телами, зависят, таким образом, не только от модулей действующих на них сил, но и от некоторого свойства самих тел. Это свойство тел характеризуется особой физической величиной, называемой массой.

По определению Ньютона, *массой тела называется количество вещества, содержащееся в этом теле.*

Вес однородного тела пропорционален его объему, а следовательно, и количеству вещества, в нем содержащемуся. Способ сравнения массы тел по их весу переносят и на тела неоднородные, считая массы двух любых тел одинаковыми, если при взвешивании их в одном и том же месте они будут иметь один и тот же вес. Вес тела, как известно, изменяется в зависимости от географической широты места, в котором производится взвешивание. Но масса данного тела, по воззрениям классической механики, является величиной неизменной, и потому его вес нельзя принять в качестве точной меры массы тела.

Известно также, что в каждом данном месте наблюдения все тела падают в пустоте с одинаковым ускорением. Модуль этого ускорения g находится в той же зависимости от места наблюдения, что и вес тела, так что отношение веса тела к ускорению свободно падающего тела — величина постоянная; это отношение и принимают за меру массы тела.

Обозначая массу тела через m , его вес через G и ускорение свободно падающего тела через g , будем иметь

$$m = \frac{G}{g}. \quad (126)$$

Масса тела равна отношению его веса к ускорению свободно падающего тела в том месте, в котором производится его взвешивание.

Так как ускорение свободно падающего тела не зависит от его размеров, то масса материальной точки определяется по ее весу той же зависимостью (126), что и масса любого тела.

Пусть на свободную материальную точку весом G подействовала сила P , сообщившая ей ускорение a . Согласно рассматриваемому закону модули ускорений, сообщаемых точке приложенными к ней силами, должны быть пропорциональны модулям этих сил.

Следовательно,

$$\frac{P}{G} = \frac{a}{g}.$$

Отсюда имеем

$$P = \frac{G}{g} a$$

или, на основании зависимости (126),

$$P = ma. \quad (127)$$

Модуль силы, приложенной к материальной точке, равен произведению массы точки на модуль ее ускорения.

Равенство (127) дает динамический способ определения модуля силы.

Из этого равенства следует, что $a = P/m$, т. е. чем больше масса данной точки, тем меньше ускорение точки, сообщаемое ей данной силой. Следовательно, чем больше масса точки, тем медленнее под действием приложенной к ней силы изменяется скорость точки, тем меньше отклоняется ее движение от инерциального. Таким образом, различные материальные точки обладают различной инертностью и *мерой инертности материальной точки является ее масса*.

Так как различные точки твердого тела могут совершать различные движения и иметь различные ускорения, то масса тела не во всех случаях является мерой его инерции. Последняя зависит, вообще говоря, не только от величины масс частиц тела, но и от распределения их в теле. *Масса тела полностью характеризует его инерцию только в том случае, когда тело совершает поступательное движение* (т. е. когда ускорения всех точек тела одинаковы).

Так как направление силы всегда совпадает с направлением ускорения, сообщаемого ею свободной материальной точке, а масса точки есть скалярная положительная величина, то равенству (127) можно придать ¹⁾ форму векторного уравнения:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{a}. \quad (128)$$

Вектор силы, приложенной к материальной точке, равен произведению массы точки на вектор ее ускорения.

Уравнение (128), устанавливающее зависимость между движением материальной точки и действующей на нее силой и являющееся полной математической формулировкой основного закона динамики, называется основным уравнением динамики точки.

С изменением системы отсчета наблюдаемый характер движения точки, а следовательно, и ее ускорение могут изменяться, потому второй закон динамики, так же как и ее первый закон, нельзя применять безотносительно к системе отсчета.

Под ускорением точки, входящим в основное уравнение динамики, надо понимать абсолютное ускорение точки, т. е. ее ускорение относительно системы отсчета, принимаемой за инерциальную.

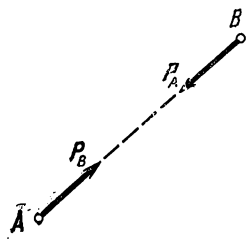
Третий закон (закон равенства действия и противодействия)

Силы, с которыми действуют друг на друга две материальные точки, всегда равны по модулю и направлены по одной прямой (соединяющей данные точки) в противоположные стороны.

¹⁾ От умножения вектора на положительный скаляр m получается вектор того же направления, отличающийся по модулю в m раз.

Этот закон был подробно рассмотрен нами во введении в механику (§ 3, стр. 21—22) и имел уже широкое применение в статике.

Если материальная точка A действует на материальную точку B с силой \mathbf{P}_A , то точка B действует на точку A с силой $\mathbf{P}_B = -\mathbf{P}_A$ (рис. 212). Пусть масса точки A равна m_1 и ускорение, сообщаемое ей силой \mathbf{P}_B , равно \mathbf{a}_1 , масса же точки B равна m_2 и ускорение, сообщаемое ей силой \mathbf{P}_A , равно \mathbf{a}_2 . По основному уравнению динамики $\mathbf{P}_B = m_1 \mathbf{a}_1$ и $\mathbf{P}_A = m_2 \mathbf{a}_2$. Согласно же данному закону $\mathbf{P}_A = -\mathbf{P}_B$, и, следовательно, $m_1 \mathbf{a}_1 = -m_2 \mathbf{a}_2$. Отсюда имеем



$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (129)$$

Рис. 212.

Модули ускорений, сообщаемых друг другу двумя материальными точками, обратно пропорциональны массам этих точек. Направлены же эти ускорения так же, как и силы взаимодействия, т. е. по одной прямой AB в противоположные стороны.

Четвертый закон (закон независимости действия сил)

Ускорение, получаемое материальной точкой при одновременном действии на нее нескольких сил, равно геометрической сумме тех ускорений, которые получила бы эта точка под действием каждой из данных сил в отдельности.

Пусть на точку, масса которой равна m , одновременно действуют силы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \dots, \mathbf{P}_n$, сообщая ей при этом ускорение \mathbf{a} . Ускорения, которые получила бы эта точка при раздельном действии на нее каждой из данных сил, обозначим через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$. Согласно данному закону, установленному на основании многочисленных опытов Галилеем, будем иметь

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \dots + \mathbf{a}_n. \quad (130)$$

Если мы умножим обе части данного равенства на скалярный множитель m (на массу точки), то получим

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + m\mathbf{a}_3 + \dots + m\mathbf{a}_n.$$

Согласно основному уравнению динамики (128)

$$ma_1 = P_1, \quad ma_2 = P_2, \quad ma_3 = P_3, \quad \dots, \quad ma_n = P_n.$$

Отсюда получаем

$$ma = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n.$$

Обозначив через P равнодействующую системы сил, приложенных к данной точке, равную их геометрической сумме, будем иметь

$$ma = P.$$

Последнее равенство внешне ничем не отличается от основного уравнения динамики (128). Следовательно, *основное уравнение динамики остается в силе и в том случае, когда на точку одновременно действует несколько сил. Под приложенной к точке силой P нужно понимать в этом случае равнодействующую всех сил, действующих на точку.*

§ 83. Системы единиц

Единицы для измерения всех физических величин, встречающихся в теоретической механике, могут быть выражены через три основные единицы, совокупность которых определяет систему единиц. Двумя основными единицами во всех системах служат единица длины и единица времени. За третью же основную единицу принимается либо единица силы, либо единица массы. Модуль силы и масса связаны между собой определенной зависимостью, выражаемой основным уравнением динамики:

$$P = ma. \quad (131)$$

Ускорение, как мы знаем, имеет размерность $\frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]^2}$, т. е. единица ускорения является так называемой производной единицей¹⁾ от двух основных единиц: единицы длины и единицы времени.

Следовательно, для измерения двух других величин (силы и массы), входящих в указанную выше зависимость, за основную (независимую) единицу мы можем

¹⁾ Производными единицами называются единицы, которые «производятся» из основных при помощи математических действий, выражающих те или иные физические законы, ...

принять единицу измерения только одной из них, единица же измерения другой величины будет уже производной от трех основных единиц.

Применение различных систем единиц, не только в разных странах, но и в различных областях науки и техники, вызывает значительные затруднения, и потому XI Генеральная конференция по мерам и весам в 1960 году приняла новую «Международную систему единиц» (сокращенно СИ, что значит система интернациональная).

В настоящее время в СССР, и в ряде других стран, эта система вводится как обязательная, в качестве государственного стандарта. В системе СИ за основную единицу принимается единица массы (сокращенно — кг), равная массе международного прототипа килограмма¹⁾. Размерность силы в этой системе определяется из основного уравнения динамики:

$$[\text{сила}] = [\text{масса} \times \text{ускорение}] = \left[\frac{\text{масса} \times \text{длина}}{\text{время}^2} \right].$$

Единица силы в системе СИ называется ньютоном²⁾ (сокращенно Н). Чтобы выразить эту единицу через основные единицы, надо в формулу ее размерности подставить: единицу массы — 1 кг, единицу длины — 1 м и единицу времени — 1 с.

Следовательно,

$$1 \text{ Н} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2.$$

Ньютон — сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение в 1 м/с². На практике пока еще имеет применение и так называемая техническая система единиц, в которой за основную единицу принимается единица силы: килограмм-сила (сокращенно — кгс), равная весу того же международного прототипа.

Размерность массы в технической системе определяется из основного уравнения динамики:

$$[\text{масса}] = \left[\frac{\text{сила}}{\text{ускорение}} \right] = \left[\frac{\text{сила} \times \text{время}^2}{\text{длина}} \right].$$

¹⁾ Международный прототип килограмма — платино-иридиевый эталон, хранящийся в Международном бюро мер и весов. Масса его приблизительно на 0,003% больше массы 1 кубического дециметра дистиллированной воды при 4 °С.

²⁾ В честь одного из основоположников классической механики, Исаака Ньютона (1643—1727).

Единица массы в технической системе (сокращенно т. е. м.):

$$1 \text{ т. е. м.} = \text{кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}. \quad (132)$$

Изменение ускорения g свободно падающего тела невелико для различных точек земной поверхности и обычно пользуются его средним значением $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Если вес тела $G = 9,81 \text{ кгс}$, то его масса

$$m = \frac{G}{g} = \frac{9,81}{9,81} = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}. \quad (133)$$

Следовательно, *техническая единица массы равна массе тела, вес которого равен 9,81 кгс*.

При решении задач мы будем пользоваться международной системой (системой СИ). Но поскольку на практике, очевидно, некоторое время еще придется встречаться с единицами технической системы, то при установлении различных производных единиц в соответствующих местах раздела динамики мы будем давать их выражение как в системе СИ, так и в технической системе. Там же мы будем указывать и соотношение между ними. Последние определяются весьма просто, если знать и помнить соотношение между единицей силы в системе СИ (Н) и единицей силы в технической системе (кгс).

Сила в 1 кгс — это вес эталона с массой в 1 кг. Из формулы $G = mg$ следует, что $1 \text{ кгс} = 1 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 = 9,81 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = 9,81 \text{ Н}$. Таким образом, *сила в 1 кгс = 9,81 Н, или сила в 1 Н = 0,102 кгс*.

Задача 93. Тело, масса которого $m = 10 \text{ кг}$, движется прямолинейно по гладкой горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы P . Уравнение движения тела имеет вид $s = 4t + 2t^2$ (s — в метрах, t — в секундах). Определить в ньютонах и килограммах модуль силы P .

Решение. При прямолинейном поступательном движении тела его ускорение

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = (4t + 2t^2)'' = 4 \text{ м/с}^2.$$

По основному уравнению динамики точки

$$P = ma = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = 40 \text{ Н}$$

или

$$P = 40 \cdot 0,102 \text{ кгс} = 4,08 \text{ кгс}.$$

Задача 94. Тело весом G под действием силы тяжести спускается по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 213). Определить скорость тела через 2 секунды после начала движения и пройденный им к этому времени путь, если коэффициент трения $f = 0,3$.

Решение. Так как тело движется поступательно, то его можно принять за материальную точку, сосредоточив мысленно всю его

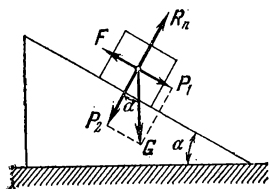


Рис. 213.

массу в центре тяжести тела и приложив к нему все силы, действующие на тело. К телу приложены: сила тяжести тела G , нормальная реакция плоскости R_n и сила трения F . Силу G разложим на две составляющие: силу P_1 , направленную параллельно плоскости, и силу P_2 , перпендикулярную к плоскости и уравновешиваемую нормальной реакцией R_n плоскости. Сила трения скольжения тела по плоскости $F = fP_2$, где нормальное давление тела на плоскость

$R_n = P_2 = G \cos \alpha$. Следовательно, $F = fG \cos \alpha$. Таким образом, равнодействующая всех сил, приложенных к телу,

$$P = P_1 - F = G \sin \alpha - fG \cos \alpha = \\ = G (\sin \alpha - f \cos \alpha) = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Ускорение тела по основному уравнению динамики будет равно

$$a = \frac{P}{m} = \frac{mg (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{m} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) = \\ = 9,81 (0,5 - 0,3 \cdot 0,866) \approx 2,4 \text{ м/с}^2.$$

Так как ускорение тела постоянно, то его движение будет равномерно ускоренным. По формулам кинематики находим

$$v = v_0 + at = 0 + 2,4 \cdot 2 = 4,8 \text{ м/с},$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 0 + \frac{2,4 \cdot 2^2}{2} = 4,8 \text{ м}.$$

ГЛАВА XVIII ОСНОВЫ КИНЕТОСТАТИКИ

§ 84. Принцип Даламбера

Принцип, который обычно связывают с именем выдающегося французского ученого Ж. Даламбера (1717—1783), лежит в основе важного метода динамики, позволяющего задачи динамики формально сводить к задачам статики.

Допустим, что к несвободной¹⁾ материальной точке M массы m приложена некоторая активная сила P . Освобождая мысленно точку от связей, заменим их действие на точку силой R реакции этих связей. Тогда точку M можно считать свободной, но находящейся под действием силы P' , являющейся равнодействующей сил P и R (рис. 214). По основному уравнению динамики точки $P' = ma$. Условно приложим к точке M еще и вектор

$$P'' = -ma. \quad (134)$$

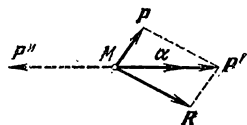


Рис. 214.

Вектор P'' , равный произведению массы точки на ее ускорение и направленный в сторону, противоположную ускорению точки²⁾, называется силой инерции этой точки. Геометрическая сумма сил P' и P'' или, что все равно (рис. 214),

¹⁾ Несвободной называется материальная точка, движение которой ограничено наложенными на данную точку связями.

²⁾ Следует обратить внимание на то, что вектор P'' силы инерции точки всегда направлен в сторону, противоположную направлению вектора ускорения точки, а не направлению ее движения. При прямолинейном равномерно замедленном движении точки направление вектора P'' совпадает с направлением движения точки.

геометрическая сумма сил P , R и P^a равна, очевидно, нулю, и эта совокупность сил представляет, следовательно, уравновешенную систему.

Сила P^a инерции материальной точки условно прилагается к самой материальной точке, и потому получающееся при этом равновесие является не действительным, а лишь условным, воображаемым равновесием.

Однако такое условное присоединение силы инерции точки к числу сил, в действительности к ней приложенных, позволяет применить к решению задач динамики хорошо известные приемы статики и лежит в основе метода, называемого методом кинетостатики.

Идея метода кинетостатики может быть сформулирована¹⁾ для материальной точки следующим образом: во всякий момент движения материальной точки приложенные к ней активные силы, силы реакций наложенных на нее связей и сила инерции данной точки (условно приложенная к ней самой) взаимно уравновешиваются.

Данный метод легко распространить и на материальную систему. Представим себе находящуюся в движении систему, состоящую из ряда связанных между собой по какому-либо определенному закону материальных точек. Во всякий момент движения системы приложенные к какой-либо ее точке активные силы, силы реакций связей и сила инерции этой точки (условно приложенная к ней самой) будут взаимно уравновешиваться. Отсюда следует, что уравновешиваться будет и вся совокупность сил, состоящая из приложенных к данной системе активных сил, сил реакций связей и сил инерции всех точек системы.

Следовательно, во всякий момент движения системы приложенные к ней активные силы, силы реакций связей и условно приложенные к каждой точке системы силы инерции этих точек взаимно уравновешиваются.

Таким образом, всякую материальную точку и всякую систему можно при применении метода кинетостатики считать в произвольный момент их движения находящимися в равновесии (условном, конечно) и, следова-

¹⁾ Эта формулировка является и весьма распространенной современной формулировкой принципа Даламбера, хотя в принципе, высказанном в свое время Даламбером, силы инерции не фигурировали вовсе.

тельно, составлять для каждого определенного случая расположения сил соответствующее число независимых уравнений равновесия, так же как составляли их в статике. Метод кинестатики вследствие своей простоты и наглядности широко применяется в технической практике для решения задач динамики. Особенно удобен этот метод для определения так называемых *динамических реакций связей*, т. е. *реакций, возникающих в связях при движении системы*. Этим методом можно пользоваться и для определения ускорений тел, входящих в состав системы.

Наряду с этим заметим, что все без исключения задачи динамики можно решать и без применения метода кинестатики, не пользуясь вовсе понятием сил инерции.

§ 85. Понятие силы инерции

В периоде не бывает одностороннего действия сил. Если материальная точка массы m в результате взаимодействия с другими, окружающими ее телами, приобрела некоторое ускорение a , то к этим телам, согласно третьему основному закону механики, приложены со стороны точки силы противодействия. Геометрическая сумма этих сил, приложенных, вообще говоря, к различным телам, формально равна $-ma$, т. е. равна силе инерции точки. Только формально, так как сложение сил приложенных к различным телам физического смысла не имеет.

Реально существуют лишь составляющие этой силы, приложенные к тем телам, которые являются источником активных сил, действующих на движущуюся с ускорением материальную точку, и к связям, наложенным на точку. О силе инерции $P^i = -ma$ можно говорить как о реальной силе лишь в том случае, когда на точку действует только одно тело.

Рассмотрим такой пример. Рабочий катит перед собой по рельсам вагонетку, сообщая ей ускорение a . Для простоты рассуждений будем считать, что вагонетка движется по горизонтальному прямолинейному пути и никаких сопротивлений своему движению не встречает. Следовательно, источником силы, сообщаемой вагонетке ускорение a , является только рабочий. По основному закону динамики для сообщения вагонетке этого ускорения рабочий должен приложить к ней силу

$P = ma$, где m — масса вагонетки. Всякое действие одного тела на другое всегда сопровождается равным и противоположно направленным действием второго тела на первое. Следовательно, рабочий будет встречать со стороны вагонетки силу противодействия $P^и = -ma$, равную по модулю силе P давления рабочего на вагонетку и направленную в противоположную сторону, т. е. в сторону, противоположную ускорению. Очевидно, что

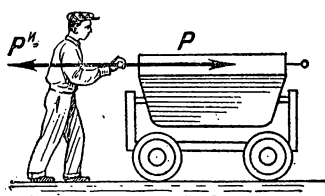


Рис. 215.

сила $P^и$ вагонетки приложена не к ней самой, а к руке рабочего (рис. 215).

Необходимо всегда иметь в виду, что, применяя метод кинестатики, мы лишь условно прилагаем силу инерции материальной точки к самой точке. Если бы равные и противоположно направленные силы P и $P^и$ были бы в действительности приложены к одной точке, то они всегда бы уравновесились, и точка всегда бы находилась в покое или двигалась прямолинейно и равномерно, т. е. ее ускорение всегда бы равнялось нулю. Ясно, что в этом случае всегда бы равнялась нулю и сама сила инерции $P^и = -ma$.

Мы знаем, что сохранение материальной точкой неизменной скорости при отсутствии действия на нее со стороны других тел или при их равновесии называется *инерцией точки*. Отсюда сила $P^и = -ma$, возникающая при изменении ее движения, и получила название «силы инерции» — название достаточно установившееся, но не вполне удачное, приводящее иногда к смешению понятий инерции и силы инерции.

Свойством инерции материальная точка обладает всегда, сила же инерции возникает только тогда, когда на нее действуют другие тела, вынуждающие точку изменить свое движение по инерции. При этом, как мы уже говорили выше, сила инерции материальной точки в действительности к ней не приложена.

§ 86. Силы инерции при криволинейном движении точки

В общем случае движения точки по криволинейной траектории ускорение точки a , как мы знаем, удобно разлагать на две составляющие: касательное ускорение

a_t , направленное по касательной к траектории движения, и нормальное ускорение a_n , направленное по нормали в сторону вогнутости траектории, т. е. к центру кривизны. Положим, что к свободной материальной точке M массы m , движущейся со скоростью v , приложена сила P , направление которой образует с направлением скорости v некоторый угол (рис. 216). Точка в этом случае будет двигаться по криволинейному пути с ускорением $a = P/m$, направленным одинаково с силой P . Разложим его на составляющие ускорения: касательное, численно равное $a_t = \frac{dv}{dt}$ — производной от модуля скорости точки по времени, и нормальное, равное по модулю $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, где ρ — радиус кривизны траектории в данном положении материальной точки.

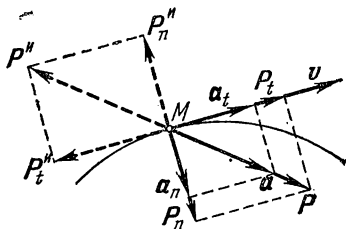


Рис. 216.

Очевидно, что при криволинейном движении точки приложенную к ней силу P можно разложить на две составляющие: касательную (тангенциальную) силу $P_t = ma_t$, изменяющую модуль скорости точки, и нормальную (центростремительную) силу $P_n = ma_n$, изменяющую направление скорости точки. Последняя составляющая заставляет точку отклоняться от прямолинейного пути по направлению касательной к траектории в данной ее точке в сторону соответствующего центра кривизны, поэтому она и получила название центростремительной силы.

При криволинейном движении точки ее силу инерции также можно разложить на две составляющие: касательную (тангенциальную) силу инерции $P_t^i = -ma_t$, направленную противоположно касательному ускорению точки, и нормальную (центробежную) силу инерции $P_n^i = -ma_n$, направленную противоположно нормальному ускорению точки.

Так как нормальное ускорение направлено по нормали к траектории в сторону ее вогнутости, то центробежная сила инерции (или просто центробежная сила) направлена по нормали в сторону выпуклости траектории, т. е. по нормали от центра кривизны. Последним

и объясняется название данной силы. Очевидно, что *центробежная сила равна по модулю и направлена противоположно центростремительной силе.*

Если точка M движется по криволинейной траектории равномерно, то $v = \text{const}$ и $a_t = dv/dt = 0$. В этом случае тангенциальная сила инерции обращается в нуль и полная сила инерции состоит лишь из одной центробежной составляющей, равной по модулю

$$P^n = P_n^n = \frac{mv^2}{\rho}. \quad (135)$$

Если точка M принадлежит телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, то, как известно из кинематики, ее касательное и центростремительное ускорения могут быть вычислены по формулам $a_t = r\varepsilon$ и $a_n = r\omega^2$, где ω и ε — угловая скорость и угловое ускорение вращения тела, а r — расстояние точки от оси вращения. Отсюда модули касательной и центробежной сил инерции могут быть вычислены по формулам

$$\left. \begin{aligned} P_t^n &= mr\varepsilon, \\ P_n^n &= mr\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

Если вращение тела равномерное, то $\varepsilon = 0$ и $P_t^n = 0$. В этом случае полная сила инерции численно равна

$$P^n = P_n^n = mr\omega^2. \quad (137)$$

При несвободном криволинейном движении точки действующей на нее центростремительной силой будет

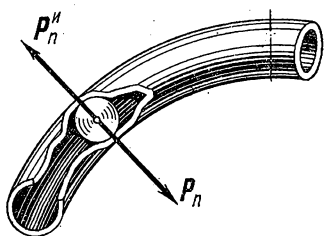


Рис. 217.

реакция связи, заставляющая точку отклоняться от прямолинейного пути и, следовательно, сообщаящая ей соответствующее нормальное ускорение. Силой же, действующей на связь, будет являться центробежная сила инерции данной точки.

Положим, что в криволинейном желобе лежит шар (рис. 217). Если сообщить ему толчок в направлении оси желоба, то возникнут одновременно две силы: центростремительная сила P_n — давление стенок желоба на шар, направленная по нормали к центру кривизны,

и центробежная сила $P_n^{\text{и}}$ — давление шара на стенки желоба, направленная по той же нормали от центра. Если желоб взять резиновым, то действие центробежной силы наглядно проявится выпучиванием при движении шара наружной поверхности желоба.

Подвешенное к нити тело (рис. 218) натягивает ее при покое с силой, равной по модулю весу G тела. Будучи же приведено в колебание, тело натягивает нить в момент ее перехода через вертикальное положение с силой T , равной по модулю

$$T = G + P_n^{\text{и}} = G + \frac{G}{g} r \omega^2.$$

При быстром вращении центробежная сила инерции тела, приложенная к нити, осуществляющей связь, заставляющую тело совершать криволинейное движение, может настолько увеличить натяжение нити, что произойдет ее разрыв. В момент разрыва нити исчезнет центростремительная сила, приложенная к телу, так как исчезает связь, делавшая его движение несвободным; в тот же самый момент исчезнет и центробежная сила, и тело будет перемещаться по касательной к окружности в той ее точке, в которой оно находилось в момент разрыва нити.

Аналогичным действием центробежной силы объясняется и происходящий иногда разрыв маховиков при их очень быстром вращении. Если вся масса вращающегося тела распределена симметрично относительно его оси вращения, то центробежные силы, развиваемые отдельными его частями, сказываются только в возникновении динамических напряжений (внутренних усилий) в материале тела. Эти динамические напряжения при больших скоростях могут достигать весьма большой величины, и с ними безусловно нужно считаться. Но если масса вращающегося тела распределена несимметрично относительно оси вращения, то центробежные силы отдельных частиц тела оказывают также еще и добавочное давление на подшипники, увеличивая трение в подшипниках и их износ. Вследствие вращения тела равнодействующая неуравновешенных сил инерции все время изменяет свое направление, а это ведет к нежелательной вибрации тела. Вопрос об уравновешивании сил

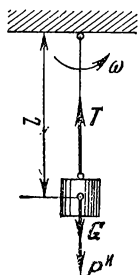
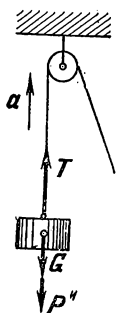


Рис. 218.

инерции имеет большое значение в современном машиностроении и рассматривается в теории механизмов и машин. При проектировании каждой новой машины необходимо учитывать силы инерции, которые могут возникнуть в ней при различных условиях работы.

Задача 95. Груз весом $G = 100$ Н поднимается вертикально вверх с ускорением $a = 5$ м/с² при помощи нити, перекинутой через неподвижный блок (рис. 219). Определить натяжение нити.

Решение. На груз действуют следующие силы: сила G тяжести груза, направленная вертикально вниз, и реакция T нити, численно равная ее натяжению и направленная вертикально вверх. Условно присоединим к этим силам силу $P^{\text{и}}$ инерции груза, равную по модулю ma и направленную противоположно ускорению, т. е. вертикально вниз. Тогда, пользуясь методом кинестатики, можем считать груз находящимся в равновесии под действием сил G , T и $P^{\text{и}}$. Из условия равновесия сил, действующих по одной прямой, имеем



откуда

$$G + P^{\text{и}} = T,$$

$$T = G + P^{\text{и}} = G + \frac{G}{g} a = 100 + \frac{100}{9,81} \cdot 5 \approx 151 \text{ Н}.$$

Сила $P^{\text{и}}$ груза условно приложена нами к самому грузу в целях применения к решению задачи метода кинестатики. Но эта сила реальна по отношению к нити, заставляющей груз двигаться с данным ускорением вверх. При некотором ускорении натяжение T нити может оказаться настолько большим, что нить оборвется.

Если бы груз опускался с тем же ускорением, то его сила инерции была бы направлена вертикально вверх. При тех же данных мы бы имели

$$G - P^{\text{и}} = T,$$

откуда $T = G - P^{\text{и}} = 100 - \frac{100}{9,81} \cdot 5 \approx 49 \text{ Н}.$

Если бы груз был только подвешен на нити (оставался в покое) или двигался прямолинейно и равномерно, то $a = 0$ и $T = G = 100$ Н.

Задача 96. Через блок перекинута гибкая нить, к концам которой подвешены грузы (рис. 220) весом G_1 и G_2 , причем $G_2 > G_1$. Найти ускорение a грузов, принимая во внимание массу блока. Вес блока равен G , радиус его r . Массу блока для простоты считать равномерно распределенной по его ободу.

Решение. Сила инерции большего груза $P_2^{\text{и}} = G_2 a / g$ и направлена вертикально вверх. Сила инерции меньшего груза $P_1^{\text{и}} = G_1 a / g$ и направлена вертикально вниз. Так как блок совершает вращательное движение, то силу инерции каждой из частиц блока (например, частицы M) можно разложить на две составляющие: касательную силу инерции $P_i^{\text{и}} = -ma_i$, направленную противо-

ложно касательному ускорению, и центробежную силу инерции $P_n^{\text{и}} = -ma_n$, направленную по радиусу от оси блока. Приложив к поступательно движущимся грузам (рассматриваемым как материальные точки) и ко всем частицам блока их силы инерции, можно условно считать всю систему находящейся в равновесии.

Как известно из статики, для равновесия тела, имеющего неподвижную ось, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех приложенных к нему сил относительно этой оси равнялась нулю.

Для изменяемой системы, с которой мы имеем дело в данном случае, это условие будет также необходимым, хотя и недостаточным.

Составляя сумму моментов сил относительно оси блока O , будем иметь

$$G_1 r + P_1^{\text{и}} r + P_2^{\text{и}} r - G_2 r + \sum P_t^{\text{и}} r = 0.$$

Центробежные силы инерции $P_n^{\text{и}}$, а также сила тяжести блока G и реакция R оси блока в последнее уравнение не войдут, так как их моменты относительно оси блока O равны нулю.

Массу блока мы приняли равномерно распределенной по его ободу. При отсутствии скольжения нити по ободу модуль касательного ускорения a_t точки на ободу будет равен модулю a ускорения нити (грузов) и, следовательно, модуль касательной силы инерции материальной точки обода $P_t^{\text{и}} = ma_t = ma$. Сумма моментов касательных сил инерции всех точек блока (расположенных по его ободу)

$$\sum P_t^{\text{и}} r = \sum mar = ar \sum m = arM,$$

где M — масса всего обода. Но $M = G/g$. Следовательно,

$$\sum P_t^{\text{и}} r = \frac{G}{g} ar.$$

Подставляя в написанное выше уравнение равновесия системы значения $P_1^{\text{и}}$, $P_2^{\text{и}}$ и $\sum P_t^{\text{и}} r$, получим

$$G_1 r + \frac{G_1}{g} ar + \frac{G_2}{g} ar - G_2 r + \frac{G}{g} ar = 0,$$

откуда находим

$$a = \frac{(G_2 - G_1) g}{G_1 + G_2 + G}.$$

Задача 97. Крестовина COD (рис. 221), на концах которой находятся точечные грузы C и D равного веса ($G_1 = G_2 = G$), равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB , проходящей через середину длины крестовины. Пренебрегая массой крестовины,

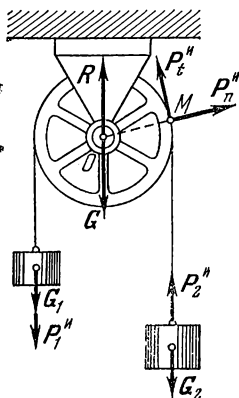


Рис. 220.

определить реакции подпятника A и цилиндрического подшипника B в тот момент, когда крестовина COD находится в плоскости xAy . Известны расстояния: $AO = m$, $BO = n$, $CO = OD = l$ и жесткий угол α между крестовиной и осью вращения AB .

Решение. Пользуясь методом кинестатики, условно присоединим к силам, действующим на крестовину, силы инерции точечных грузов C и D . Так как крестовина вращается равномерно ($\varepsilon = 0$), то касательные составляющие сил инерции грузов равны нулю. Центробежные силы инерции грузов равны по модулю:

$$P_1^n = P_2^n = P^n = \frac{G}{g} r \omega^2 = \frac{G}{g} l \omega^2 \sin \alpha.$$

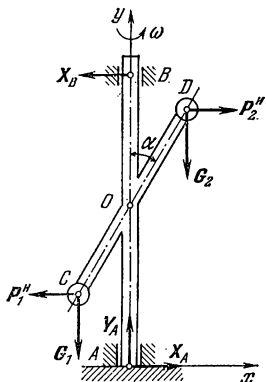


Рис. 221.

В момент, когда крестовина находится в плоскости xAy , действующие на нее активные силы G_1 и G_2 и центробежные силы инерции грузов лежат в той же плоскости. Следовательно, в этой же плоскости будут лежать и реакции связей. Неизвестную по направлению реакцию подпятника раскладываем на составляющие X_A и Y_A . Реакция X_B подшипника перпендикулярна к его оси.

Составляем уравнения равновесия (условного) для плоской системы сил

$$\begin{aligned} \sum X_k &= X_A - X_B + P_2^n - P_1^n = 0, \text{ откуда } X_A = X_B \\ (\text{так как } P_1^n &= P_2^n), \\ \sum Y_k &= Y_A - G_1 - G_2 = 0, \text{ откуда } Y_A = G_1 + G_2 = 2G, \\ \sum m_A(P_k) &= G_1 l \sin \alpha + P_1^n (m - l \cos \alpha) + X_B (m + n) - \\ &\quad - G_2 l \sin \alpha - P_2^n (m + l \cos \alpha) = 0, \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим

$$X_A = X_B = \frac{2P^n l \cos \alpha}{m + n} = \frac{Gl^2 \sin 2\alpha}{g(m + n)} \omega^2. \quad (I)$$

Если бы крестовина не вращалась ($\omega = 0$), то горизонтальные X_A и X_B реакции связей равнялись бы нулю и, следовательно, подшипник и подпятник не испытывали бы боковых давлений. При вращении же крестовины эти реакции (а следовательно, и боковые давления на связи) пропорциональны квадрату угловой скорости крестовины и могут достигать весьма большой величины. Так как плоскость, в которой лежит крестовина, при вращении крестовины поворачивается вместе с ней, то возникающие динамические реакции вызывают биение вала AB в подшипниках и усиленный их износ.

Реакции X_A и X_B могут быть равными нулю и при вращении вала ($\omega \neq 0$), но для этого надо, как видно из равенства (I), чтобы

$\sin 2\alpha = 0$. Последнее возможно только при $\alpha = 0$ или $\alpha = 90^\circ$, т. е. когда ось вращения является осью симметрии вращающейся системы.

Вращающееся тело, реакции в опорах которого не зависят от скорости вращения тела, называется динамически уравновешенным.

Для того чтобы вращающееся тело было динамически уравновешенным, ему чаще всего придают форму тела вращения с тем, чтобы оно вращалось вокруг своей оси симметрии.

Динамически уравновешенным может быть и несимметричное тело. Для этого необходимо, как это показывается в более подробных курсах механики, чтобы ось вращения тела была одной из так называемых главных центральных осей инерции данного тела. Если из-за неизбежных погрешностей изготовления ось вращения тела будет недостаточно совпадать с его осью симметрии (в общем случае с его главной центральной осью инерции), то эти погрешности устраняются специальными приемами (так называемой динамической балансировкой тела).

ГЛАВА XIX

РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛЫ

§ 87. Работа постоянной силы на прямолинейном пути

Если под действием данной силы модуль скорости материальной частицы, к которой сила приложена, изменяется при перемещении этой частицы, то сила совершает работу. Работа эта будет тем больше, чем больше модуль силы и длина пути, пройденного точкой приложения данной силы. В простейшем случае, когда линия действия силы совпадает с направлением движения точки ее приложения (например, линия действия силы тяжести тела при его движении по вертикальному направлению), работа A силы равна произведению ее модуля P на длину S пути, пройденного точкой ее приложения.

Если при этом направление силы совпадает с направлением движения точки ее приложения (например, направление силы тяжести тела, падающего по вертикали), то сила вызывает ускорение движения и работа данной силы считается положительной, $A = PS$. Если же направление силы противоположно направлению движения точки ее приложения (например, направление силы тяжести тела, брошенного по вертикали вверх), то эта сила вызывает замедление движения. В этом случае работа силы считается отрицательной, $A = -PS$. Наконец, когда направление силы перпендикулярно к направлению перемещения точки ее приложения (например, направление силы тяжести тела, скользящего по горизонтальной плоскости), то эта сила не влияет¹⁾ на

¹⁾ Сила, направленная по нормали к траектории движения точки, сообщает ей нормальное ускорение, которое может только изменять направление движения точки (если этому не препятствуют наложенные на точку связи) или изменять давление на связь.

модуль скорости точки. Поэтому *работа силы, перпендикулярной к направлению движения точки ее приложения, равна нулю: $A = 0$.*

Рассмотрим теперь более общий случай.

Пусть точка M тела, к которой приложена постоянная по модулю и по направлению сила \mathbf{P} , перемещается¹⁾ прямолинейно из положения M в положение M' (рис. 222, а и 222, б), причем угол между направлением силы и направлением перемещения точки равен α , а путь, пройденный точкой, равен S .

Силу \mathbf{P} можно разложить на две составляющие: нормальную \mathbf{P}_n , не совершающую работы, и касательную \mathbf{P}_t , модуль которой $P_t = P \cos \alpha$.

Так как работу совершает только вторая составляющая, то работа силы \mathbf{P} будет равна

$$A = P_t S = PS \cos \alpha. \quad (138)$$

Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна произведению модуля силы на длину пути, пройденного ее точкой приложения, и на косинус угла между направлением силы и направлением движения ее точки приложения.

Работа силы есть скалярная величина, т. е. вполне определяется ее численным значением и знаком.

Нетрудно видеть (рис. 222, а), что если угол α будет острым, то направление касательной составляющей \mathbf{P}_t силы \mathbf{P} будет совпадать с направлением движения точки ее приложения. Движение точки будет ускоренным, и, в соответствии с формулой (138), работа силы будет положительной. Силы, направление которых составляет острый угол с направлением движения их точки приложения, совершают положительную работу.

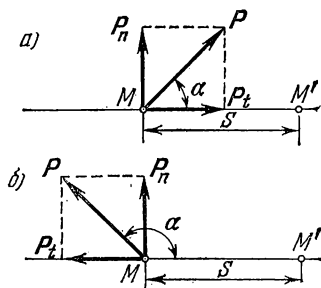


Рис. 222.

¹⁾ Заметим, что когда мы говорим здесь о работе данной силы, приложенной к некоторой точке тела, мы не предполагаем непременно, что на тело действует только одна эта сила или что она является равнодействующей всех сил, приложенных к телу. На него одновременно могут действовать и другие силы.

Если же угол α будет тупым (рис. 222, б), то направление касательной составляющей P_t силы P будет противоположно направлению движения ее точки приложения. Движение точки будет замедленным и (так как косинус тупого угла — величина отрицательная), работа силы будет отрицательной. Силы, направление которых составляет тупой угол с направлением движения их точки приложения, совершают отрицательную работу.

Если направление постоянной силы совпадает с направлением движения точки ее приложения или прямо противоположно направлению движения последней, то, как это следует из формулы (138),

$$A = \pm PS. \quad (139)$$

Последняя формула применима не только в случае прямолинейного движения точки приложения постоянной силы, но и при криволинейном движении, если только эта сила все время направлена по касательной к траектории движения ее точки приложения.

Работа силы имеет, очевидно, следующую размерность:

$$[A] = [\text{сила}] \cdot [\text{длина}].$$

За единицу работы в системе СИ принимается работа силы в 1 Н при перемещении его тела на расстояние в 1 м в направлении действия силы. Эта единица называется джоулем¹⁾ (сокращенно — Дж).

В технической системе единиц работа измеряется в килограмм-сила·метр (сокращенно — кгс·м). Так как сила в 1 кгс = 9,81 Н, то

$$1 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 1 \text{ кгс} \cdot 1 \text{ м} = 9,81 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 9,81 \text{ Дж}.$$

Установленное в механике понятие работы (называемой иногда механической работой) возникло из повседневного опыта. Однако нужно заметить, что оно не всегда совпадает с тем, что понимают под работой с физиологической точки зрения. Так, человек, неподвижно держащий тяжелый груз на вытянутых руках, не совершает, очевидно, никакой механической работы ($S = 0$), с физиологической же точки зрения он совершает, конечно, определенную (при большом весе груза и весьма значительную) работу.

¹⁾ В честь выдающегося английского физика Джоуля (1818—1889).

Задача 98. Определить работу, которую надо затратить для того, чтобы передвинуть на расстояние $S = 10$ м по горизонтальному полу тело, масса которого $m = 10$ кг. Коэффициент трения $f = 0,5$.

Решение. Сила тяжести тела в данном случае не совершает работы, так как ее направление перпендикулярно к направлению движения тела. Для равномерного передвижения по горизонтальному полу к телу нужно приложить горизонтальную силу P , равную по модулю силе трения F между данным телом и полом:

$$P = F = fR_n = fG.$$

Вес тела $G = mg = 10 \cdot 9,81 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = 981 \text{ Н}$. Следовательно, $P = F = 0,5 \cdot 981 = 490 \text{ Н}$, откуда $A = PS = 490 \cdot 10 = 4910 \text{ Н} \cdot \text{м} = 4,9 \text{ кДж}$ (килоджоуль).

Задача 99. Цилиндрический каток диаметром $d = 60$ см приводится в движение человеком, который давит на рукоятку AO с постоянной силой $P = 120 \text{ Н}$ в направлении AO (рис. 223), длина $AO = 1,5$ м, высота точки A над горизонтом $h = 1,2$ м. Определить работу, совершенную при передвижении катка на расстояние $S = 5$ м.

Решение. Так как сила P направлена под некоторым углом α к направлению перемещения точки O ее приложения, то работа этой силы $A = PS \cos \alpha$.

На рис. 223 имеем $\sin \alpha = \frac{h - d/2}{AO} = \frac{1,2 - 0,3}{1,5} = 0,6$. Следовательно, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0,8$ и $A = 120 \cdot 5 \cdot 0,8 = 480 \text{ Дж}$.

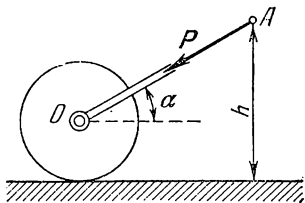


Рис. 223.

§ 88. Работа переменной силы на криволинейном пути. Графическое изображение работы

Пользуясь установленным в предыдущем параграфе понятием работы постоянной силы на прямолинейном пути, перейдем теперь к вычислению работы силы в самом общем случае.

Пусть точка приложения M переменной по модулю и по направлению силы P перемещается из положения A в положение B , описывая при этом некоторую криволинейную траекторию (рис. 224). Разобьем путь $AB = S$, пройденный точкой, на очень большое число n столь малых участков, что без большой погрешности можно считать каждый такой участок прямолинейным, а силу, действующую на данном участке, — постоянной и по величине, и по направлению.

Обозначим через $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$ постоянные для данных участков пути значения модуля переменной силы \mathbf{P} , через $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_{n-1}$ — длины соответствующих (прямолинейных) участков пути и через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$ — углы между соответствующими на-

правлениями силы и скорости точки ее приложения.

На основании предыдущего (формула (138)) работа силы \mathbf{P}_1 на участке ΔS_1 будет равна $\Delta A_1 = P_1 \Delta S_1 \cos \alpha_1$. Аналогично вычисляется работа силы и на других участках данного криволинейного пути.

Полная работа A переменной силы \mathbf{P} на конечном пути AB будет, очевидно, равна сумме работ на всех его отдельных участках:

$$\begin{aligned} A = & \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \\ & + \Delta A_{n-1} = P_1 \Delta S_1 \cos \alpha_1 + \\ & + P_2 \Delta S_2 \cos \alpha_2 + \dots + \\ & + P_{n-1} \Delta S_{n-1} \cos \alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

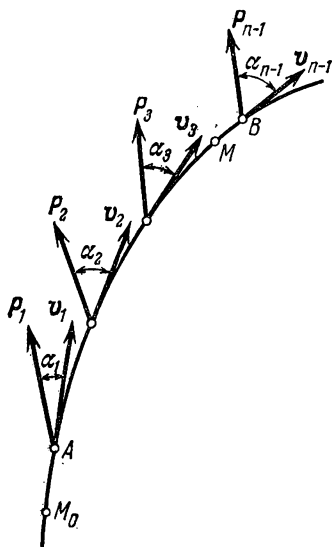


Рис. 224.

Применяя сокращенное обозначение алгебраической суммы однородных слагаемых, можно записать, что

$$A = \sum P_k \Delta S_k \cos \alpha_k.$$

Ясно, что чем на большее число участков n мы разобьем путь, пройденный точкой приложения переменной силы \mathbf{P} , тем точнее будет вычисляться работа этой силы на данном пути. В пределе, когда число участков n станет бесконечно большим, длина каждого из них станет бесконечно малой величиной.

Работа силы на бесконечно малом перемещении ее точки приложения называется элементарной работой.

Обозначая величину элементарной работы силы через dA и длину бесконечно малого элемента пути через dS , будем иметь

$$dA = P dS \cos \alpha, \quad (140)$$

Элементарная работа силы равна произведению значения модуля силы в данный момент на длину элемента пути и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения точки ее приложения в этот момент.

Найдя выражение для элементарной работы силы на каждом элементе dS пути, определим работу на всем конечном пути $\overline{AB} = S$ как предел суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, т. е. как интеграл от элементарной работы, вычисленный в пределах изменения пути точки приложения силы (от нуля до S):

$$A = \int_A^B dA = \int_0^S P \cos \alpha \cdot dS. \quad (141)$$

Работа переменной силы на конечном пути равна интегралу от элементарной работы данной силы, вычисленному в пределах изменения пути точки приложения силы.

В случае переменной по модулю и по направлению силы P для вычисления ее работы по формуле (141) входящие под знак интеграла переменные P и $\cos \alpha$ должны быть выражены как функции пути S .

Как производится вычисление этого интеграла в некоторых частных случаях, мы покажем в дальнейшем, в §§ 90 и 91*. Сейчас же, заметив, что вычисление данного интеграла во многих случаях представляет значительные трудности, перейдем к более простому и часто применяемому в технике графическому способу вычисления работы переменной силы.

Пусть точка M приложения переменной по модулю и по направлению силы P перемещается из положения M_1 в положение M_2 , определяемые на ее траектории соответствующими расстояниями $s_1 = \overline{OM_1}$ и $s_2 = \overline{OM_2}$, отсчитываемыми от некоторого начала O (рис. 225).

Возьмем прямоугольную систему координат (рис. 226) и в выбранных масштабах будем откладывать: по оси

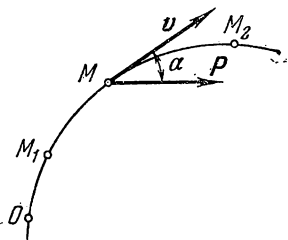


Рис. 225.

абсцисс — расстояние s точки от начала отсчета, а по оси ординат — соответствующую величину проекции силы \mathbf{P} на направление скорости точки M ее приложения, т. е. алгебраическое значение касательной составляющей данной силы $P_t = P \cos \alpha$.

Соединяя точки с данными координатами s и P_t непрерывной кривой, получим график зависимости $P_t = f(s)$.

Работа силы \mathbf{P} на ее пути S будет изображаться в соответствующем масштабе площадью фигуры $A_1B_1B_2A_2$ (рис. 226), ограниченной осью абсцисс, кривой $P_t = f(s)$ и двумя ординатами, соответствующими начальному и конечному положению точки приложения силы \mathbf{P} .

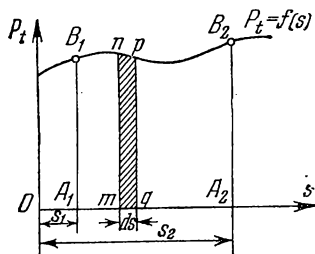


Рис. 226.

В самом деле. Площадь какого-либо элементарного (заштрихованного на рис. 226) прямоугольника $mnpq$, основание которого $mq = ds$ и высота $mn = P_t = P \cos \alpha$, представляет собой величину элементарной работы данной силы:

$$dA = P ds \cos \alpha = P_t ds = mn \cdot mq.$$

Площадь же фигуры $A_1B_1B_2A_2$ является пределом суммы бесконечно большого числа таких элементарных прямоугольников, т. е.

$$\text{пл. } A_1B_1B_2A_2 = \int_{s_1}^{s_2} P \cos \alpha \cdot ds.$$

На рис. 226 значения касательной составляющей силы P_t откладывались вверх (в положительную сторону соответствующей оси), и потому работа силы \mathbf{P} , изображаемая площадью фигуры $A_1B_1B_2A_2$, будет положительной. Если же построенная кривая $P_t = f(s)$ или часть ее будет расположена от оси абсцисс в сторону отрицательных значений P_t , то соответствующая площадь будет изображать отрицательную работу.

При вычислении работы силы графическим способом нужно, конечно, учитывать масштабы, в которых откладывались на графике $P_t = f(s)$ расстояния s и соответ-

ствующие им значения модуля силы P_i . Пусть были приняты масштабы: μ_s м/мм для расстояний и μ_p Н/мм для силы. Тогда, если площадь фигуры $A_1B_1B_2A_2$ окажется равной F мм², определяемая работа силы будет равна $A = F\mu_s\mu_p$ Дж.

Для вычисления площадей криволинейных фигур существует ряд способов, а также специальный прибор, называемый планиметром.

К графическому способу определения работы силы приходится прибегать в тех случаях, когда нам известны значения силы P только для отдельных значений s , установление же аналитической зависимости $P_i = f(s)$ затруднительно или даже невозможно. В ряде случаев (например, при определении работы пара или газа в цилиндрах паровой машины или двигателя) график зависимости $P_i = f(s)$ получается автоматически, при помощи самопишущих приборов, называемых индикаторами.

§ 89. Теорема о работе равнодействующей

Теорема. *Работа равнодействующей нескольких сил на некотором пути равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же пути.*

Пусть к материальной точке M , перемещающейся из положения M_1 в положение M_2 по любой криволинейной траектории, приложено несколько сил: P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 227). Равнодействующую данных сил обозначим через R_P . Как известно, проекция равнодействующей на любую ось равна алгебраической сумме проекций составляющих на ту же ось. Приняв за ось проекций ось, имеющую направление скорости v точки приложения сил, и обозначая углы между силами $R_P, P_1, P_2, \dots, P_n$ и осью проекций (направлением вектора v) соответственно через $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, будем иметь

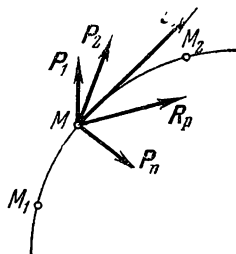


Рис. 227.

$$R_P \cos \alpha = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n.$$

Умножая обе части этого равенства на бесконечно малый элемент пути dS , получим, что *элементарная работа равнодействующей равна алгебраической сумме*

элементарных работ составляющих сил:

$$R_P dS \cos \alpha = P_1 dS \cos \alpha_1 + P_2 dS \cos \alpha_2 + \dots + P_n dS \cos \alpha_n.$$

Интегрируя последнее равенство в пределах изменения пути точки M от нуля до S (вдоль траектории $\overline{M_1 M_2}$), находим

$$\begin{aligned} \int_0^S R_P \cos \alpha \cdot dS &= \int_0^S P_1 \cos \alpha_1 \cdot dS + \\ &+ \int_0^S P_2 \cos \alpha_2 \cdot dS + \dots + \int_0^S P_n \cos \alpha_n \cdot dS. \end{aligned}$$

Отсюда, так как интегралы, стоящие в обеих частях последнего равенства, представляют собой выражения работы соответствующих сил на данном конечном пути S точки их приложения, получим

$$A_{RP} = A_{P_1} + A_{P_2} + \dots + A_{P_n}.$$

Теорема, таким образом, доказана.

§ 90. Работа силы тяжести

Заменим силы тяжести всех частиц тела одной равнодействующей силой \mathbf{G} , равной по модулю весу тела. Пусть при движении тела его центр C тяжести, перемещаясь по некоторой криволинейной траектории (в вертикальной плоскости xOy , рис. 228), перешел из положения C_1 в положение C_2 . Ординаты точек C_1 и C_2 обозначим соответственно через y_1 и y_2 .

Выделим какой-либо бесконечно малый участок CC' траектории и найдем элементарную работу постоянной по модулю и по направлению силы \mathbf{G} на этом бесконечно малом перемещении dS ее точки приложения.

По формуле (140) $dA = GdS \cos \alpha$, где α — угол между направлением элементарного перемещения $\overrightarrow{CC'}$ точки C и направлением силы \mathbf{G} . Величину $dS \cos \alpha$ можно рассматривать как проекцию вектора элементарного перемещения $\overrightarrow{CC'}$ на ось y . Поскольку эта проекция направлена в отрицательную сторону оси y , то $dS \cos \alpha = -CN = -dy$ (точка C движется в сторону убывающих

ординат). Таким образом, элементарная работа силы тяжести

$$dA = -G dy.$$

Работа же этой силы на конечном пути $\overline{C_1 C_2}$ будет равна

$$\begin{aligned} A = \int_{C_1}^{C_2} dA &= \int_{y_1}^{y_2} (-G) dy = -G \int_{y_1}^{y_2} dy = \\ &= -G(y_2 - y_1) = G(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Обозначая через h вертикальное перемещение центра тяжести тела, т. е. разность между начальной y_1 и

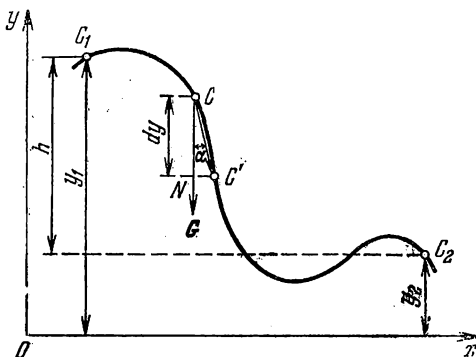


Рис. 228.

конечной y_2 его высотами над некоторой горизонтальной плоскостью, будем иметь

$$A = Gh. \quad (142)$$

Работа силы тяжести тела равна произведению веса тела на величину вертикального перемещения его центра тяжести. Если на рассматриваемом пути центр тяжести тела опускается ($y_1 \geq y_2$ и разность $h = y_1 - y_2$ положительна), то работа его силы тяжести положительна. Если же центр тяжести тела поднимается ($y_1 < y_2$ и $h = y_1 - y_2$ отрицательна), то работа его силы тяжести отрицательна.

Если бы на рассматриваемом пути конечная высота y_2 центра тяжести тела оказалась бы равной его начальной высоте y_1 , то изменение h в высоте расположения

центра тяжести тела, а следовательно, и работа силы тяжести тела при данном перемещении тела были бы равны нулю.

Таким образом, работа силы тяжести тела зависит только от его веса и изменения в высоте расположения его центра тяжести и не зависит от формы траектории центра тяжести тела и длины пути, пройденного этой точкой.

Задача 100. Груз весом $G = 500$ Н равномерно перемещают по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, на высоту $h = 5$ м (рис. 229). Определить затрачиваемую при этом работу, если коэффициент трения скольжения при движении $f = 0,4$ и если к грузу приложена сила P , параллельная наклонной плоскости.

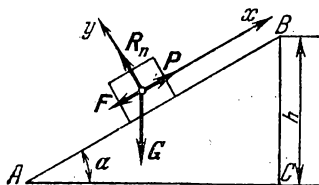


Рис. 229.

Решение. Для равномерного перемещения груза по плоскости приложенная к нему сила P должна уравновешивать действие на груз всех остальных приложенных к нему сил: силы тяжести G , нормальной реакции плоскости R_n , силы трения F .

Решим задачу двумя способами.
1. Проведя координатные оси x и y так, как показано на рис. 229, составляем уравнения равновесия сил, приложенных к грузу:

$$\sum Y_k = R_n - G \cos \alpha = 0, \text{ откуда } R_n = G \cos \alpha,$$

$$\sum X_k = P - G \sin \alpha - F = 0, \text{ откуда } P = G \sin \alpha + F.$$

Но модуль силы трения скольжения при движении равен $F = fR_n = fG \cos \alpha$. Таким образом, модуль силы, необходимой для равномерного перемещения груза,

$$P = G \sin \alpha + F = G (\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Из треугольника ABC находим путь $S = AB$, проходимый грузом при его подъеме на высоту $h = BC$:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{h}{S}, \text{ откуда } S = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Так как направление силы P совпадает с направлением перемещения, то искомая работа

$$A = PS = \frac{G (\sin \alpha + f \cos \alpha) h}{\sin \alpha} = \frac{500 (0,5 + 0,4 \cdot 0,866) \cdot 5}{0,5} = 4232 \text{ Н} \cdot \text{м} \approx 4,23 \text{ кДж}.$$

2. Работа A' равнодействующей сил G , R_n и F равна алгебраической сумме работ всех составляющих сил.

Работа силы тяжести при подъеме груза на высоту h будет равна $A_1 = -Gh$.

Работа A_2 нормальной реакции R_n при перемещении груза по плоскости всегда равна нулю, так как сила R_n перпендикулярна к перемещению.

Работа A_3 силы трения F , направленной всегда в сторону, противоположную движению, равна

$$A_3 = -FS = -fG \frac{h}{\sin \alpha} \cos \alpha.$$

Следовательно, работа равнодействующей

$$A' = A_1 + A_2 + A_3 = -Gh - fG \frac{h}{\sin \alpha} \cos \alpha = - \frac{G (\sin \alpha + f \cos \alpha) h}{\sin \alpha}.$$

Из статики же известно, что уравнивающая P данной системы сил и равнодействующая той же системы всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Отсюда и искомая работа A силы P равна работе A' равнодействующей, взятой с противоположным знаком:

$$A = -A' = 4,23 \text{ кДж.}$$

§ 91*. Работа силы упругости

Возьмем какую-либо винтовую пружину и закрепим ее верхний конец неподвижно. Если пренебречь весом пружины, то ее можно считать при этом находящейся в недеформированном состоянии (рис. 230, *а*). Будем теперь растягивать пружину, прилагая к свободному ее концу M вертикальную силу P' , направленную вниз (рис. 230, *б*). До известных пределов между растягивающей пружину силой и ее деформацией (удлинением) будет существовать прямая пропорциональность. Чем больше будет удлинение пружины, тем большая сила потребуется для удержания пружины в растянутом состоянии. Последнее объясняется тем, что при деформации реального тела в нем всегда возникают, как мы уже ранее говорили, внутренние силы, так называемые силы упругости, сопротивляющиеся действию на тело внешних сил. В результате пружина будет действовать на точку M с некоторой силой P , которая будет уравнивать приложенную внешнюю силу P' . Так как при равновесии силы равны, то сила P также будет пропорциональна удлинению пружины. Сила P называется *упругой реакцией* или *упругой силой*. Обозначая удлинение пружины через x (рис. 230, *б*), будем иметь

$$P = cx, \quad (143)$$

где c — постоянный для данной пружины коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом жесткости* пружины¹⁾.

Вычислим работу переменной силы P при удлинении пружины на некоторую величину $M_1M_2 = h$ (рис. 230, в).

Примем прямолинейную траекторию точки M за ось x , направив эту ось вертикально вниз (рис. 230, б). За начало координат возьмем точку O , соответствующую положению точки M при недеформированном состоянии пружины.

По формуле (140)

$$dA = P dS \cos \alpha.$$

Принимая во внимание, что $P = cx$, $dS = dx$ и $\cos \alpha = \cos 180^\circ = -1$ (так как сила P упругости пружины направлена в сторону, противоположную прямолинейному перемещению ее точки приложения M), находим

$$dA = -cx dx.$$

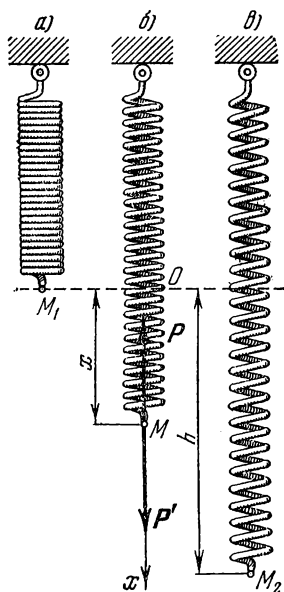


Рис. 230.

Работа же силы P на конечном перемещении $M_1M_2 = h$ ее точки приложения будет равна

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA = \int_0^h (-cx) dx = -\frac{cx^2}{2} \Big|_0^h = -\frac{ch^2}{2}.$$

¹⁾ Коэффициент c жесткости пружины может быть вычислен по формуле, устанавливаемой в курсе сопротивления материалов. Значение этого коэффициента для данной пружины можно найти из простого опыта. Подвесив к пружине какой-либо груз, определяют величину ее так называемого статического удлинения $\Delta l_{ст}$, т. е. удлинения пружины в положении равновесия груза (по прекращении его колебаний). В этом положении сила упругости пружины равна по модулю весу G подвешенного к ней груза. Следовательно,

$$c = \frac{P}{x} = \frac{G}{\Delta l_{ст}}.$$

По такой же формуле определяется работа не только силы упругости растягиваемой пружины, но и работа силы упругости, возникающей при растяжении и сжатии любого прямолинейного бруса, изгибе балки и т. д. — во всех случаях, когда модуль силы упругости определяется по формуле $P = cx$, где c — некоторый постоянный для данного тела коэффициент пропорциональности, а x — величина соответствующего данному значению силы перемещения точки ее приложения, отсчитываемого от положения этой точки при недеформированном состоянии тела.

Таким образом, работа силы P упругости тела, выражаемой законом $P = cx$, численно равна половине произведения коэффициента пропорциональности в выражении данной силы на квадрат перемещения ее точки приложения, отсчитываемого от положения этой точки при недеформированном состоянии тела:

$$A = -\frac{ch^2}{2}. \quad (144)$$

Знак минус в формуле (144) показывает, что работа силы упругости, как и всякой силы сопротивления, отрицательна. Так как внешняя растягивающая сила равна по модулю упругой силе и направлена противоположно, то работа внешней силы A' равна A по абсолютной величине, но положительна:

$$A' = \frac{ch^2}{2}.$$

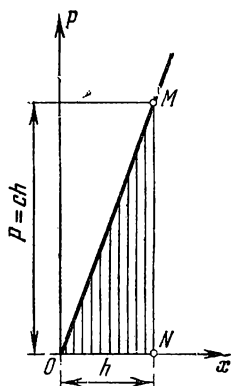


Рис. 231.

Такова работа, которую нужно затратить для того, чтобы удлинить пружину на величину h .

Зависимость между численным значением упругой силы $P = cx$ и перемещением x точки ее приложения графически выражается, очевидно, прямой линией (рис. 231).

В соответствии со сказанным ранее (стр. 352) работа этой силы на некотором пути h выразится, в соответствующем масштабе, площадью треугольника ONM . Таким образом, мы вновь приходим к

установленному выше численному значению работы упругой силы:

$$A = \frac{MN \cdot ON}{2} = \frac{ch \cdot h}{2} = \frac{ch^2}{2}.$$

§ 92. Мощность. Коэффициент полезного действия

Мощностью силы называется величина, характеризующая быстроту, с которой этой силой совершается работа в данный момент времени.

Средняя мощность $N_{\text{ср}}$ силы за некоторый промежуток времени t равна отношению совершенной ею за это время работы A к данному промежутку времени:

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{t}. \quad (145)$$

Если работа производится равномерно, т. е. в одинаковом количестве за равные, произвольно взятые промежутки времени, то истинная мощность N силы измеряется работой, совершаемой ею в единицу времени, и совпадает, следовательно, со средней мощностью:

$$N = \frac{A}{t}, \quad (146)$$

которая в этом случае постоянна.

Если же работа совершается неравномерно, то средняя мощность будет величиной непостоянной, зависящей от величины взятого промежутка времени. В этом случае пользуются понятием мощности в данный момент времени.

Мощность N силы в данный момент времени t равна отношению элементарной работы dA силы за бесконечно малый промежуток времени, начинающийся в момент t , к величине dt этого промежутка времени:

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (147)$$

Очевидно, что размерность мощности будет определяться равенством

$$[N] = \frac{[\text{работа}]}{[\text{время}]}. \quad .1$$

За единицу мощности в системе СИ принимается мощность, при которой работа в 1 джоуль совершается в

1 секунду. Эта единица мощности называется ваттом¹⁾ (сокращенно — Вт)

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с.}$$

В технической системе за единицу мощности принимается мощность, при которой в 1 секунду совершается работа в 1 кгс·м. Эта единица называется килограмм-сила-метр в секунду (сокращенно — 1 кгс·м/с). Вследствие малости последней единицы в технической практике до сих пор еще пользуются более крупной единицей мощности, называемой лошадиной силой²⁾ (сокращенно — л. с.):

$$1 \text{ л. с.} = 75 \text{ кгс} \cdot \text{м/с.}$$

Найдем соотношение между лошадиной силой и ваттом. Ранее (стр. 348) нами было установлено, что $1 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 9,81 \text{ Дж}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 \text{ л. с.} &= 75 \text{ кгс} \cdot \text{м/с} = 75 \cdot 9,81 \text{ Дж/с} = \\ &= 736 \text{ Вт} = 0,736 \text{ кВт.} \quad (148) \end{aligned}$$

Единицы мощности ватт, киловатт и т. п. не следует путать с часто употребляемыми в электротехнической практике единицами работы: ватт-час, киловатт-час и т. д. Ватт-час — это работа, совершаемая в течение одного часа силой, имеющей мощность в один ватт. Следовательно, $1 \text{ Вт} \cdot \text{ч} = 1 \text{ Дж/с} \cdot 3600 \text{ с} = 3600 \text{ Дж}$. Формуле (147) мощности в данный момент можно придать другой вид, если подставить в нее установленное ранее [формула (140)] выражение элементарной работы $dA = P dS \cos \alpha$:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{P dS \cos \alpha}{dt}.$$

Так как производная dS/dt от перемещения точки приложения силы по времени равна модулю v скорости этой точки, то

$$N = P v \cos \alpha. \quad (149)$$

¹⁾ Ватт (Уатт) — крупнейший английский изобретатель (1736—1819).

²⁾ Это исторически сложившееся и укоренившееся название является крайне неудачным. Необходимо помнить, что «лошадиная сила» есть единица мощности, а не единица силы.

Мощность силы в данный момент равна произведению соответствующих этому моменту времени модуля данной силы, модуля скорости точки ее приложения и косинуса угла между направлениями силы и скорости точки ее приложения.

Если направление силы совпадает с направлением скорости точки ее приложения, то $\alpha = 0$ и $\cos \alpha = 1$. В этом случае формула (149) упрощается:

$$N = P v. \quad (150)$$

Выражая силу в ньютонах и скорость в метрах в секунду, по формулам (149) и (150) получим мощность в ваттах.

При работе любой машины часть потребляемой ею мощности тратится не на совершение полезной работы, а на преодоление так называемых вредных сопротивлений, неизбежно возникающих при работе машины. Так, например, мощность, потребляемая токарным станком, тратится не только на совершение полезной работы — снятие стружки, но и на преодоление трения в движущихся частях машин и сопротивления их движению со стороны воздуха.

Отношение полезной мощности $N_{\text{п}}$ машины к потребляемой ею мощности N или отношению полезной работы $A_{\text{п}}$ за некоторый определенный промежуток времени ко всей затраченной работе A за тот же промежуток времени называется механическим коэффициентом полезного действия.

Обозначая, как это обычно принято, коэффициент полезного действия (сокращенно к. п. д.) греческой буквой η (эта), будем иметь

$$\eta = \frac{N_{\text{п}}}{N} = \frac{A_{\text{п}}}{A}. \quad (151)$$

К. п. д. является одной из важнейших характеристик машины; показывающей, насколько рационально используется потребляемая ею мощность. Как это видно из формулы (151), чем выше к. п. д. машины, тем большую часть потребляемой ею мощности будет составлять полезная мощность $N_{\text{п}}$, тем меньше в данной машине потеря мощности на преодоление вредных сопротивлений.

Однако полностью вредные сопротивления никогда не могут быть устранены, и потому к. п. д. всегда меньше единицы.

Задача 101. Для использования работы водопада поставлена турбина, к. п. д. которой $\eta = 0,8$. Определить в киловаттах полезную мощность турбины, если водопад дает в течение каждой минуты 600 м^3 воды, падающей с высоты 6 м.

Решение. Масса 1 куб. метра воды равна 1 Мг^1 (одному мегаграмму). Вес воды, падающей в течение одной минуты, $G = mg = 600 \cdot 10^3 \text{ кг} \times 9,81 \text{ м/с}^2 = 5886 \cdot 10^3 \text{ Н} \approx 5886 \text{ кН}$.

По формуле (146) потребляемая турбиной мощность будет равна

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Gh}{t} = \frac{5886 \cdot 6}{60} \frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 589 \text{ кВт.}$$

По формуле (151) полезная мощность турбины

$$N_{\text{п}} = \eta N = 0,8 \cdot 588,6 \approx 471 \text{ кВт.}$$

Задача 102. Каким должен быть диаметр поршня одноцилиндровой паровой машины при среднем давлении пара на поршень $p = 400 \text{ КПа}$, средней скорости поршня $v = 2 \text{ м/с}$, полезной мощности машины $N_{\text{п}} = 50 \text{ кВт}$ и ее механическом к. п. д. $\eta = 0,9$?

Решение. Потребляемая машиной мощность найдется из формулы (150):

$$N = \frac{N_{\text{п}}}{\eta} = \frac{50}{0,9} \approx 55,6 \text{ кВт.}$$

Так как направление силы давления пара на поршень совпадает с направлением его движения, то $\cos \alpha = 1$ и по формуле (150) мощность будет $N = Pv$.

Отсюда сила, с которой пар давит на поршень,

$$P = \frac{N}{v} = \frac{55,6}{2} = 27,8 \text{ кН.}$$

С другой стороны, эта сила равна давлению пара p , умноженному на площадь поршня $F = \pi d^2/4$:

$$P = pF = p \frac{\pi d^2}{4}.$$

Следовательно, диаметр поршня должен быть равным

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi p}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 27,8}{3,14 \cdot 400}} \approx 0,297 \text{ м} = 29,7 \text{ см.}$$

§ 93. Работа и мощность силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси

Пусть в некоторой точке M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z (рис. 232), приложена сила P . Разложим эту силу на две взаимно перпендикулярные составляющие: P' , лежащую в плоскости Π ,

¹⁾ $1 \text{ Мг} = 10^6 \text{ г} = 10^3 \text{ кг}$.

перпендикулярной к оси z вращения тела, и P'' , перпендикулярную к этой плоскости, т. е. параллельную оси z .

По теореме о работе равнодействующей элементарная работа силы P равна сумме элементарных работ составляющих сил P' и P'' . Но сила P'' направлена перпендикулярно к перемещению точки M , происходящему в плоскости Π , и потому ее работа равна нулю. Таким образом, элементарная работа dA силы P равна элементарной работе составляющей P' :

$$dA = P' dS \cos \alpha.$$

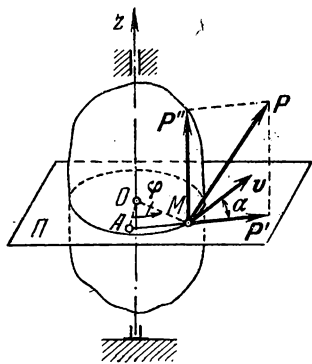


Рис. 232.

Как всегда в выражении работы, здесь $\cos \alpha = \cos(\widehat{P', v})$.

Траекторией точки M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, является окружность радиуса $OM = r$, и, следовательно, элементарное перемещение этой точки $dS = r d\varphi$, где $d\varphi$ — элементарный угол поворота тела (в радианах). (Предполагается, что элементарный поворот происходит в положительную сторону отсчета углов φ , как это изображено на рис. 232.) Следовательно,

$$dA = P' r \cos \alpha \cdot d\varphi.$$

Вспоминая установленное в статике (§ 40) понятие момента силы относительно оси, найдем момент силы P относительно оси вращения z :

$$m_z(P) = m_O(P') = P' \cdot OA,$$

где P' — проекция силы P на плоскость Π , перпендикулярную к оси z , и OA — длина перпендикуляра, опущенного из точки O пересечения оси z с плоскостью Π на линию действия силы P' .

Стороны угла AOM перпендикулярны к векторам P' и v , и потому

$$\angle AOM = (\widehat{P', v}) = \alpha,$$

следовательно,

$$OA = OM \cdot \cos \alpha = r \cos \alpha.$$

Момент силы относительно оси вращения тела называется часто *вращающим моментом*.

Обозначая его через $M_{\text{вр}}$, находим; что $M_{\text{вр}} = = m_z(\mathbf{P}) = P'r \cos \alpha$. Произведя соответствующую замену в найденном выше выражении элементарной работы силы \mathbf{P} , окончательно получаем

$$dA = M_{\text{вр}} d\varphi. \quad (152)$$

Элементарная работа dA силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента $M_{\text{вр}}$ этой силы на элементарный угол $d\varphi$ поворота тела.

Весь вывод сделан в предположении, что элементарное вращение происходит в положительную сторону, вращающий момент также положителен. Нетрудно убедиться в том, что формула (152) остается верной при любых знаках $M_{\text{вр}}$ и $d\varphi$: если знаки одинаковые, работа положительна, в случае разных знаков она отрицательна.

Работа силы при повороте тела на конечный угол φ будет равна

$$A = \int_0^{\varphi} M_{\text{вр}} d\varphi. \quad (153)$$

В случае переменной величины вращающего момента $M_{\text{вр}}$ для вычисления данного интеграла должна быть известна зависимость вращающего момента от угла φ :

$$M_{\text{вр}} = f(\varphi).$$

В случае же, когда $M_{\text{вр}} = \text{const}$, будем иметь

$$A = \int_0^{\varphi} M_{\text{вр}} d\varphi = M_{\text{вр}} \int_0^{\varphi} d\varphi = M_{\text{вр}} \varphi.$$

Работа A при постоянном вращающем моменте $M_{\text{вр}}$ равна произведению этого момента на угол φ поворота тела:

$$A = M_{\text{вр}} \varphi. \quad (154)$$

Найдем теперь мощность силы¹⁾, приложенной к вращающемуся телу, подставив в формулу (147)

¹⁾ Если к телу приложено несколько сил, то суммарную работу и суммарную мощность этих сил определяют по аналогичным формулам, понимая в этом случае под вращающим моментом $M_{\text{вр}}$ алгебраическую сумму моментов всех сил относительно оси вращения тела.

мощности соответствующее выражение (152) элементарной работы:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{M_{\text{вр}} d\varphi}{dt}.$$

Но $d\varphi/dt = \omega$, где ω — угловая скорость тела. Следовательно,

$$N = M_{\text{вр}} \omega. \quad (155)$$

Мощность N силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента $M_{\text{вр}}$ этой силы на угловую скорость ω тела.

Если вращающий момент $M_{\text{вр}}$ выражен в Н·м (ньютон-метрах), а угловая скорость ω — в рад/с, то мощность, определяемая по формуле (155), будет выражаться в ваттах.

Если приложенная к вращающемуся телу сила P направлена по касательной к окружности, описываемой точкой ее приложения, то ее часто называют окружным усилием.

Очевидно, что в этом случае

$$M_{\text{вр}} = Pr, \quad (156)$$

где P — окружное усилие, r — радиус окружности, описываемой точкой приложения этой силы.

Задача 103. Ведущий шкив диаметром 0,4 м вращается с угловой скоростью $\omega = 15,7$ рад/с и передает мощность $N = 11$ кВт. Определить: 1) вращающий момент и 2) окружное усилие.

Решение. Вращающий момент определяем по формуле (155):

$$M_{\text{вр}} = \frac{N}{\omega} = 0,7 \text{ кН} \cdot \text{м (килоньютон-метров)}.$$

По формуле (156) находим окружное усилие:

$$P = \frac{M_{\text{вр}}}{r} = 3,5 \text{ кН}.$$

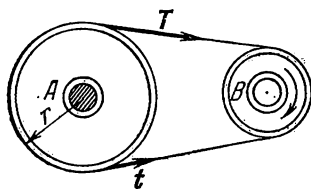


Рис. 233.

Задача 104. Шкив A (рис. 233) получает вращение от ведущего шкива B при помощи ременной передачи. Ведущая ветвь ремня натянута с силой $T = 2$ кН, ведомая ветвь — с силой $t = 1,2$ кН. Диаметр шкива A равен $2r = 600$ мм. Определить работу, совершаемую данными силами за 10 оборотов шкива A , а также передаваемую ремнем мощность при частоте вращения этого шкива, равной 120 об/мин.

Р е ш е н и е. Вращающий момент, приложенный к шкиву,

$$M_{\text{вр}} = Tr - tr = (T - t) r = (2 - 1,2) \cdot 0,3 = 0,24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Угол поворота шкива $\varphi = 2\pi \cdot 10 = 62,8$ радиана. По формуле (154) работа приложенных к шкиву сил

$$A = M_{\text{вр}}\varphi = 0,24 \cdot 62,8 \approx 15 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Угловая скорость шкива, соответствующая 120 об/мин:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 120}{30} = 12,56 \text{ рад/с}.$$

Мощность, передаваемую ремнем, находим по формуле (155):

$$N = M_{\text{вр}}\omega = 0,24 \cdot 12,56 \approx 3,05 \text{ кВт}.$$

ГЛАВА XX

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

§ 94. Количество движения и импульс силы

Количеством движения материальной точки называется вектор $m\mathbf{v}$, равный произведению массы m точки на вектор \mathbf{v} ее скорости.

Так как масса точки есть скалярная положительная величина, то направление вектора количества движения точки всегда совпадает с направлением ее скорости, модуль же количества движения равняется произведению массы точки на модуль скорости точки. Из совпадения направлений векторов $m\mathbf{v}$ количества движения и скорости \mathbf{v} точки и из соотношения между их модулями следует, что *проекции количества движения точки на координатные оси равны произведениям массы точки на соответствующие проекции ее скорости:*

$$(m\mathbf{v})_x = mv_x \quad \text{и} \quad (m\mathbf{v})_y = mv_y. \quad (157)$$

Количество движения имеет следующую размерность:

$$\begin{aligned} [\text{количество движения}] &= [\text{масса}] \cdot [\text{скорость}] = \\ &= \frac{[\text{сила}] \cdot [\text{время}]^2}{[\text{длина}]} \cdot \frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]} = [\text{сила}] \cdot [\text{время}]. \end{aligned}$$

Следовательно, в системе СИ количество движения измеряется в килограмм-метрах в секунду, т. е. в кг·м/с.

С понятием количества движения тесно связано понятие импульса¹⁾ силы.

Рассмотрим только случай, когда на точку действует постоянная по модулю и по направлению сила.

¹⁾ Латинское слово «импульс» — толчок.

Импульсом постоянной по модулю и по направлению силы за некоторый промежуток времени называется вектор, равный произведению вектора \mathbf{P} силы на данный промежуток времени.

Обозначая вектор импульса силы через \mathbf{I} , будем иметь

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}t. \quad (158)$$

Так как время есть скалярная величина, то направление вектора \mathbf{I} совпадает с направлением вектора \mathbf{P} силы.

Очевидно, что проекции на координатные оси импульса постоянной силы за некоторый промежуток времени равны произведениям соответствующих проекций этой силы на данный промежуток времени:

$$I_x = Xt \quad \text{и} \quad I_y = Yt, \quad (159)$$

где X и Y — проекции силы \mathbf{P} на соответствующие координатные оси.

Импульс силы имеет размерность

$$[\text{импульс силы}] = [\text{сила}] \cdot [\text{время}].$$

В системе СИ единицей импульса силы будет ньютон-секунда, т. е. импульс силы, равной 1 Н и действующей в течение 1 с. Вспоминая размерность ньютонa, будем иметь

$$\text{Н} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Как видим, импульс силы имеет одинаковую размерность с количеством движения.

§ 95. Теорема об изменении количества движения материальной точки

Пусть материальная точка массы m под действием приложенной к ней силы \mathbf{P} движется относительно некоторой неподвижной¹⁾ системы координатных осей по какой-либо траектории AB (рис. 234). Пусть эта точка занимала на траектории в начале данного промежутка

¹⁾ Здесь и везде в динамике под неподвижной системой координат мы будем понимать систему отсчета, принимаемую за инерциальную.

времени (в момент $t = 0$) положение M_0 и имела скорость v_0 , в конце же данного промежутка (в момент времени t_1) занимает положение M_1 и имеет скорость v_1 .

Зависимость между вектором ускорения a точки и вектором приложенной к нему силы P выражается, как мы знаем, основным уравнением динамики (128):

$$ma = P.$$

Спроектировав это векторное равенство на координатную ось x , получим

$$ma_x = P_x = X.$$

Но, как известно из кинематики (§ 60, формула (74)), проекция ускорения на неподвижную координатную ось равна первой производной по времени от проекции скорости точки на ту же ось:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

Подставляя это значение в предыдущее уравнение, получим

$$m \frac{dv_x}{dt} = X$$

или, вводя в левой части равенства постоянный множитель m под знак производной,

$$\frac{d}{dt} (mv_x) = X. \quad (160)$$

Производная по времени от проекции на какую-либо ось количества движения точки равна проекции на ту же ось силы, действующей на точку.

Умножая обе части равенства (160) на dt , будем иметь

$$d(mv_x) = X dt.$$

Интегрируя обе части равенства в соответствующих пределах и обозначая проекцию начальной (в момент $t = 0$) скорости точки на ось x через v_{0x} и проекцию

конечной (в момент времени $t = t_1$) скорости точки на ту же ось через v_{1x} , получим

$$\int_{v_{0x}}^{v_{1x}} d(mv_x) = \int_0^{t_1} X dt.$$

Так как интеграл от $d(mv_x)$ равен mv_x , а проекция X постоянной силы \mathbf{P} на неподвижную ось есть также постоянная величина и ее можно вынести за знак интеграла, то после подстановки пределов интегрирования получаем

$$mv_{1x} - mv_{0x} = Xt_1 = I_x. \quad (161)$$

Совершенно так же получается и аналогичное уравнение в проекциях на ось y :

$$mv_{1y} - mv_{0y} = Yt_1 = I_y. \quad (162)$$

Уравнения (161) и (162) выражают собой теорему об изменении количества движения материальной точки (в проекциях на оси координат), которую можно сформулировать следующим образом: *изменение проекции количества движения точки на какую-либо ось равно проекции на ту же ось импульса силы, действующей на точку, за то же время¹⁾*.

В случае прямолинейного движения точки вдоль оси x теорема выражается одним уравнением (161).

Теорема об изменении количества движения точки, как и другие так называемые основные теоремы динамики, является следствием второго основного закона динамики и вытекающего из него основного уравнения динамики и представляет собой результат математического преобразования этого уравнения.

¹⁾ Установленная теорема об изменении количества движения точки справедлива и для случая, когда на точку действует переменная сила. В этом случае проекции импульса силы на координатные

оси равны $I_x = \int_0^{t_1} X dt$ и $I_y = \int_0^{t_1} Y dt$. Проекции силы X и Y здесь

уже переменные величины, и их нельзя вынести за знак интегралов. Вычислить значения данных интегралов можно лишь тогда, когда проекции силы на координатные оси являются известными функциями времени, т. е. когда нам известны функции $X = f_1(t)$ и $Y = f_2(t)$.

Теоремой об изменении количества движения точки следует пользоваться для решения тех задач, в которых устанавливается зависимость между массой (или весом) материальной точки, ее скоростью в начальный и конечный моменты движения, силой и временем ее действия, причем одна из этих величин является искомой, а остальные — известными величинами.

Если на точку действует одновременно не одна, а несколько сил, то под проекциями X , Y , Z силы, действующей на точку, надо понимать, согласно закону независимости действия сил, проекцию равнодействующей всех сил, приложенных к точке, равную, как известно, алгебраической сумме проекций составляющих сил на соответствующую ось.

Всякую несвободную материальную точку, т. е. точку, движение которой ограничено некоторыми условиями (связями), можно мысленно освободить от связей, заменив их действие на точку реакциями этих связей. Следовательно, рассматривая движение несвободной точки, надо в число сил, на нее действующих, включить и реакции всех наложенных на точку связей.

Задача 105. Тело, масса которого $m = 20$ кг, двигалось поступательно по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью $v_0 = 0,5$ м/с.

Определить модуль и направление скорости v_1 тела через 3 с после приложения к нему постоянной силы $P = 40$ Н, направленной в сторону, противоположную его начальной скорости v_0 .

Решение. Так как вес тела уравнивается нормальной реакцией горизонтальной плоскости, то равнодействующей всех сил, действующих на данное тело при его движении по гладкой плоскости, будет приложенная к нему сила P .

Примем направление этой силы за направление оси x проекций и применим к данному движению тела теорему об изменении количества движения точки в проекции на ось y [уравнение (161)]:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = I_x = Xt_1.$$

При выбранном направлении оси проекций имеем

$$v_{0x} = -v_0, \quad X = P = \text{const.}$$

Подставляя эти значения в уравнение, получим

$$mv_{1x} + mv_0 = Pt.$$

Отсюда проекция конечной скорости v тела

$$v_{1x} = \frac{P}{m} \cdot t - v_0 = \frac{40}{20} \cdot 3 - 0,5 = 5,5 \text{ м/с.}$$

Так как проекция скорости v_1 получилась положительной, то направление этой скорости совпадает с принятым направлением оси x ,

т.е. с направлением силы P . Модуль искомой скорости

$$v_1 = |v_{1x}| = 5,5 \text{ м/с.}$$

Задача 106. Молот весом $G = 20 \text{ кН}$ падает с высоты $h = 1 \text{ м}$ на поковочную болванку; деформация болванки происходит в течение $t_1 = 0,01 \text{ с}$. Определить среднюю величину силы давления молота на болванку.

Решение. На молот действуют вертикальные силы: его сила тяжести G и реакция болванки. Переменную, изменяющуюся в течение данного промежутка времени t_1 , величину реакции болванки заменим некоторым ее средним значением R .

Примем направление движения молота (вертикально вниз) за направление оси x и применим теорему об изменении количества движения к движению молота за промежуток времени от момента его соприкосновения с болванкой до момента, когда заканчивается ее деформация и скорость молота обращается в нуль:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = I_x = Xt_1.$$

В данном уравнении конечная скорость v_1 молота и ее проекция v_{1x} равны нулю. Начальная скорость молота, по формуле Галилея [формула (90)], $v_0 = \sqrt{2gh}$ и направлена вертикально вниз. Следовательно, $v_{0x} = v_0 = \sqrt{2gh}$. Проекция равнодействующей сил, действующих на молот,

$$X = G - R = \text{const.}$$

Подставляя эти значения в уравнение, получим

$$-\frac{G}{g} \sqrt{2gh} = (G - R) t_1.$$

Отсюда реакция болванки, равная по модулю искомой силе давления молота, будет равна

$$R = G \left(1 + \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) = 20 \left(1 + \frac{1}{0,01} \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9,81}} \right) \approx 920 \text{ кН.}$$

Задача 107. Тело¹⁾ M брошено под углом α к горизонту (рис. 235) с начальной скоростью v_0 . Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить время t_1 подъема тела до наивысшего положения.

Решение. Сопротивлением воздуха мы пренебрегаем, и потому можно считать, что к телу приложена только постоянная (для данного места) сила тяжести $G = mg$, направленная вертикально вниз.

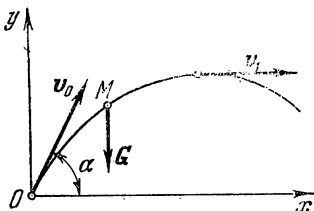


Рис. 235.

Проведем оси координат так, как показано на рис. 235, и применим теорему об изменении количества движения точки в проекции на ось y :

$$mv_{1y} - mv_{0y} = I_y = Yt_1.$$

¹⁾ Имеется в виду, что тело движется поступательно, и потому его можно принять за материальную точку.

При выбранном направлении оси проекций имеем

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha, \quad v_{1y} = 0$$

(так как в наивысшем положении тела скорость его направлена горизонтально);

$$Y = -G = -mg = \text{const.}$$

Подставляя эти значения в уравнение, получим

$$-mv_0 \sin \alpha = -mgt_1.$$

Отсюда находим искомое время подъема тела:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

§ 96. Потенциальная и кинетическая энергия

Одним из основных физических понятий является энергия.

В механике под энергией тела понимается величина, характеризующая его способность совершать в определенных условиях ту или иную работу. При этом различают два вида так называемой механической энергии: потенциальную и кинетическую.

Потенциальной энергией или энергией положения называется энергия, зависящая только от взаимного расположения тел или частей одного и того же тела.

Потенциальная энергия тела измеряется той работой, которую оно может совершить при перемещении его из данного положения в какое-либо другое. Так, например, тело весом G , удерживаемое на высоте h над земной поверхностью, обладает относительно этой поверхности потенциальной энергией, равной произведению Gh , т. е. той работе, которую оно может совершить при падении на землю (если будут устранены препятствия такому движению тела).

Нужно иметь в виду, что понятие потенциальной энергии — понятие относительное и имеет смысл только при указании двух сопоставляемых друг с другом положений тела. Очевидно, например, что потенциальная энергия тела, лежащего на земле у края колодца, относительно данного места земной поверхности будет равна нулю. В то же время это тело обладает определенной величиной потенциальной энергии относительно дна колодца, и притом тем большей, чем больше глубина последнего.

Потенциальной энергией обладает и всякое тело, находящееся в состоянии упругой деформации, например: растянутая, сжатая или закрученная пружина, сжатый воздух или газ и т. д. Возникающие при деформации тела, т. е. при изменении во взаимном расположении его частиц, силы упругости совершают определенную работу в процессе восстановления формы тела, когда будут устранены причины, удерживающие тело в данном деформированном состоянии.

Кинетической энергией тела называется энергия его механического движения.

Кинетическая энергия измеряется той работой, которую движущееся тело может совершить при его затормаживании до остановки. Кинетическая энергия материальной точки¹⁾ зависит только от массы точки и ее скорости в момент начала торможения. Чем больше масса точки и чем больше ее скорость, тем большей кинетической энергией обладает точка.

Так, летящий с большой скоростью снаряд, встретив на своем пути препятствия в виде толстых стен, брони и т. п. и теряя при этом свою скорость, преодолевает сопротивление этих препятствий, т. е. совершает огромную работу.

Как это будет видно из следующего параграфа, *за меру кинетической энергии материальной точки следует принять половину произведения массы m точки на квадрат модуля v ее скорости.*

Обозначая кинетическую энергию буквой T , будем иметь для материальной точки

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (163)$$

Определим размерность этой величины:

$$\begin{aligned} [\text{кинетическая энергия}] &= [\text{масса}] \cdot [\text{скорость}]^2 = \\ &= [\text{масса}] \cdot \left[\frac{\text{длина}}{\text{время}^2} \right] \cdot [\text{длина}] = [\text{сила}] \cdot [\text{длина}]. \end{aligned}$$

Таким образом, как это и следовало ожидать, кинетическая энергия имеет ту же размерность, что и работа силы, и измеряется в джоулях.

¹⁾ Или поступательно движущегося тела.

§ 97. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Пусть материальная точка M массы m под действием приложенной к ней силы \mathbf{P} движется по некоторой криволинейной траектории (рис. 236).

Движение всякой материальной точки подчиняется основному закону динамики, и зависимость между силой \mathbf{P} , действующей на точку, и вызываемым ею ускорением \mathbf{a} точки может быть записана в виде известного нам равенства (128):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{P}.$$

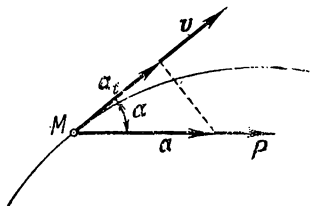


Рис. 236.

Согласно тому же закону векторы силы \mathbf{P} и ускорения \mathbf{a} точки всегда совпадают по направлению. Обозначив угол между направлением этих векторов и направлением вектора \mathbf{v} скорости

точки через α и спроектировав обе части последнего равенства на направление скорости, будем иметь

$$ma \cos \alpha = P \cos \alpha.$$

Произведение $a \cos \alpha$ представляет собой, очевидно, проекцию вектора ускорения точки на направление скорости этой точки (направление касательной к ее траектории), т. е. не что иное, как численное значение a_t касательного ускорения точки, равное, как известно из кинематики (§ 59, формула (70)), производной от численной величины скорости по времени:

$$a \cos \alpha = a_t = \frac{dv}{dt}.$$

Произведя соответствующую замену в левой части предыдущего равенства и умножая обе части его на бесконечно малое перемещение dS точки M , получим

$$m \frac{dv}{dt} dS = P dS \cos \alpha.$$

Преобразуя еще раз выражение, стоящее в левой части последнего равенства, найдем

$$m \frac{dv}{dt} dS = m \frac{dS}{dt} dv = mv dv,$$

так как производная dS/dt равна численной величине v скорости точки. Таким образом, мы приходим к равенству

$$mv dv = P dS \cos \alpha.$$

Интегрируя обе части данного равенства в соответствующих пределах и обозначая через v_0 модуль начальной скорости точки, т. е. скорости точки, соответствующей моменту, когда рассматриваемый путь S равен нулю, и через v_1 модуль конечной скорости точки, т. е. скорости, соответствующей моменту, когда длина пройденного точкой пути S , будем иметь

$$\int_{v_0}^{v_1} mv dv = \int_0^S P \cos \alpha \cdot dS.$$

Взяв интеграл, стоящий в левой части, и вспоминая [формула (141)], что интеграл, стоящий в правой части данного равенства, представляет собой работу A силы P , приложенной к данной точке, на ее пути, равном S , окончательно находим

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \quad (164)$$

Выражения $mv_1^2/2$ и $mv_0^2/2$ представляют собой, согласно данному в предыдущем параграфе определению, кинетическую энергию точки соответственно в конечный и начальный моменты рассматриваемого ее движения. Следовательно, равенство (164) может быть сформулировано следующим образом: *изменение кинетической энергии материальной точки на некотором пути равно работе приложенной к ней силы на том же пути* (теорема об изменении кинетической энергии материальной точки).

Если движение материальной точки совершалось под действием не одной, а нескольких приложенных к ней сил, то под работой A в уравнении (164) надо понимать работу равнодействующей этих сил, равную, как было доказано ранее (§ 89), алгебраической сумме работ всех составляющих сил.

Если под действием сил сопротивления, приложенных к данной материальной точке, точка останавли-

вается, то конечная скорость ее v равна нулю и уравнение (164) принимает вид

$$-\frac{mv_0^2}{2} = A.$$

Работа сил сопротивления, как мы знаем, всегда отрицательна, потому отрицательной будет и правая часть написанного выше равенства. Таким образом, выражение $mv_0^2/2$ представляет собой работу, которую может совершить данная точка, движущаяся со скоростью v_0 , при ее затормаживании до остановки, и, следовательно, эта величина действительно служит мерой кинетической энергии материальной точки.

Теорема об изменении кинетической энергии точки позволяет определить работу приложенных к ней сил при переходе точки из одного положения в другое и в тех случаях (переменной силы и криволинейного движения точки), когда непосредственное вычисление работы по формуле (141) является затруднительным. Для этого надо только знать массу точки и модули ее скорости в начальном и конечном положениях.

Если же, наоборот, мы имеем возможность непосредственного определения работы приложенных к точке сил, то, зная массу точки и модуль ее скорости в одном положении, легко найти, пользуясь данной теоремой, модуль скорости точки в другом положении.

Теорема об изменении кинетической энергии точки дает наиболее простой способ решения тех задач, в которых устанавливается зависимость между действующей на точку силой, скоростью точки и пройденным ею путем.

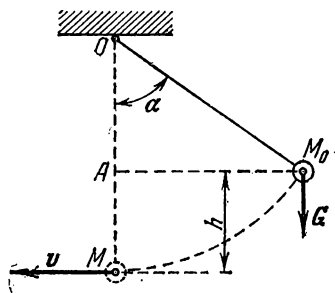


Рис. 237.

Задача 108. Материальная точка массы m , привязанная нитью длиной l к неподвижной точке O (рис. 237), отведена на угол α от положения равновесия OM и отпущена в точке M_0 без начальной скорости. Определить скорость v_1 этой точки во время ее прохождения через положение равновесия.

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

Перемещение точки из положения M_0 в положение M совершается под действием силы тяжести. Работа этой силы по формуле (142)

$$A = Gh = G \cdot AM = G (OM - OA) = G (l - l \cos \alpha) = \\ = mgl (1 - \cos \alpha) = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Начальная скорость точки $v_0 = 0$ и уравнение кинетической энергии для данного случая принимает вид

$$\frac{mv_1^2}{2} = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$v_1 = \sqrt{4gl \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Задача 109. Автомобиль движется со скоростью 54 км/ч под уклон, угол которого $\alpha = 10^\circ$. Считая силу P сопротивления от торможения равной 0,3 веса автомобиля и пренебрегая всеми другими сопротивлениями его движению, определить, на каком расстоянии S и через сколько времени t_1 от начала торможения автомобиль остановится.

Решение. Автомобиль рассматриваем как материальную точку, на которую действуют (рис. 238) следующие силы: G — сила тяжести автомобиля, R — нормальная реакция дороги и P — сопротивление от торможения.

Для определения тормозного пути S применяем теорему об изменении кинетической энергии точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

Нам известны: начальная скорость автомобиля $v_0 = 54$ км/ч $= 15$ м/с, его конечная скорость $v_1 = 0$.

Работа A равнодействующей сил, приложенных к автомобилю, равна алгебраической сумме работ составляющих сил. Работа силы тяжести равна $Gh = mgS \sin \alpha$; работа нормальной реакции R равна нулю, так как эта сила перпендикулярна к направлению движения автомобиля; работа силы P торможения равна

$$PS \cos \alpha = -0,3mgS,$$

так как данная сила направлена в сторону, противоположную движению автомобиля, и, следовательно, $\cos \alpha = -1$. Таким образом, работа равнодействующей

$$A = mgS \sin \alpha - 0,3mgS = mgS (\sin \alpha - 0,3).$$

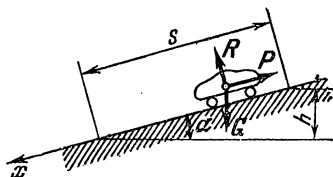


Рис. 238.

Для данного случая уравнение кинетической энергии принимает вид

$$-\frac{mv_0^2}{2} = mgS (\sin \alpha - 0,3).$$

Отсюда

$$S = -\frac{v_0^2}{2g (\sin \alpha - 0,3)} = -\frac{15^2}{2 \cdot 9,81 (0,174 - 0,3)} \approx 91 \text{ м.}$$

Для определения времени t_1 торможения можно воспользоваться теоремой об изменении количества движения точки. Приняв направление движения автомобиля за направление оси x , напишем уравнение (161):

$$mv_{1x} - mv_{0x} = I_x.$$

В данном случае $v_{1x} = 0$, $v_{0x} = v_0 = 15$ м/с. Так как действующие на автомобиль силы постоянны, то проекция на ось x импульса этих сил

$$I_x = Xt_1 = (G \sin \alpha - P) t_1 = (mg \sin \alpha - 0,3mg) t_1 = mgt_1 (\sin \alpha - 0,3).$$

Таким образом, уравнение количества движения точки принимает в данном случае вид

$$-mv_0 = mgt_1 (\sin \alpha - 0,3).$$

Отсюда

$$t_1 = -\frac{v_0}{g (\sin \alpha - 0,3)} = -\frac{15}{9,81 (0,174 - 0,3)} \approx 12 \text{ с.}$$

Задача 110. Копровая баба, масса которой $m = 100$ кг, поднимается на высоту $h = 1$ м, при последнем ударе свая уходит в грунт на глубину $S = 1$ см. Какое наибольшее давление в кПа выдержит эта свая, не давая осадки, если считать сопротивление грунта движению сваи постоянным и пренебречь массой сваи? Поперечное сечение ее $F = 0,15$ м².

Решение. Применим к движению копровой бабы уравнение кинетической энергии точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

На копровую бабу действуют: сила тяжести G (на всем ее перемещении, равном $h + S$) и реакция R сваи, равная силе сопротивления грунта. Последняя сила действует, очевидно, на копровую бабу только на перемещение сваи, равном S .

Сила тяжести

$$G = mg = 100 \cdot 9,81 = 981 \text{ Н.}$$

Работа силы тяжести будет равна $G(h + S)$. Работа реакции сваи будет равна

$$RS \cos \alpha = -RS.$$

так как направление реакции R противоположно движению копровой бабы и $\cos \alpha = -1$.

Поскольку скорость копровой бабы как в начале, так и в конце движения равна нулю, то кинетическая энергия ее на перемещении $h + S$ не изменяется. Следовательно, должна равняться нулю на этом перемещении и алгебраическая сумма работ всех приложенных к ней сил.

Таким образом, получаем

$$A = G(h + S) - RS = 0.$$

Отсюда находим реакцию свая

$$R = \frac{G(h + S)}{S} = \frac{981 \cdot 101}{1} = 99081 \text{ Н} \approx 99,1 \text{ кН}.$$

Давление p , которое может выдержать свая, не давая осадки, равна удельному сопротивлению грунта. Следовательно,

$$p = \frac{R}{F} = \frac{99,1}{0,15} = 660 \text{ кПа}.$$

Задача 111. Балка (рис. 239), лежащая на двух опорах и нагруженная посередине грузом M веса G , дает по прекращении колебаний прогиб $f = 1$ мм. Найти наибольший прогиб h балки в двух случаях: 1) когда груз M падает на середину неизогнутой балки с высоты $H = 20$ см без начальной скорости и 2) когда груз M положен на неизогнутую балку и опущен без начальной скорости.

Решение. 1. На груз M действуют силы: 1) сила тяжести G на всем перемещении груза из положения M_0 в положение M' (соответствующее положению наибольшего прогиба балки), т. е. на перемещении $H + h$; 2) упругая реакция R балки, действующая на груз, очевидно, только на перемещении h , т. е. на перемещении, соответствующем упругой деформации балки.

Работа силы тяжести равна $G(H + h)$, работа силы упругости балки по формуле (144) равна $-ch^2/2$. Коэффициент c жесткости балки находится из условий данной задачи. В положении равновесия груза, лежащего на упругой балке (по прекращении колебаний балки), сила упругости балки равна весу груза. Из формулы (143) находим $c = P/x$. В данном случае $P = G$ и $x = f$. Отсюда $c = G/f$.

Таким образом, работа силы упругости балки при ее максимальном прогибе, равном h , будет равна

$$-\frac{Gh^2}{2f}.$$

Так как скорость груза и в его начальном положении M_0 , и в конечном положении M' равна нулю, то изменения кинетической энергии груза на его перемещении $H + h$ не происходит.

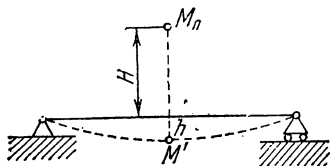


Рис. 239.

Следовательно, должна равняться нулю на этом перемещении и сумма работ всех приложенных к грузу сил:

$$A = G(H + h) - \frac{Gh^2}{2f} = 0,$$

или

$$h^2 - 2fh - 2fH = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно неизвестной величины максимального прогиба h , находим

$$h = f + \sqrt{f^2 + 2fH} = 1 + \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 200} \approx 21 \text{ мм.}$$

В решении уравнения берется знак плюс, так как в противном случае прогиб h получается отрицательным, что не имеет смысла.

2. В случае, когда груз положен на неизогнутую балку и отпущен без начальной скорости, высота падения груза $H = 0$. Подставляя это значение в решение квадратного уравнения, будем иметь

$$h = f + \sqrt{f^2 + 2f \cdot 0} = 2f = 2 \cdot 1 = 2 \text{ мм.}$$

ГЛАВА XXI

ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

§ 98. Внешние и внутренние силы системы

Системой материальных точек, или просто системой, называется, как мы знаем, совокупность материальных точек, связанных между собой какими-либо условиями. Таким образом, движение каждой точки системы зависит от движения всех остальных ее точек.

Всякое твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек. Однако системой может быть и совокупность тел, связанных между собой каким-либо образом. Так, изучая движение кривошипно-ползунного механизма (рис. 240) какого-либо, например автомобильного, двигателя, мы можем в зависимости от характера поставленной задачи принять за систему как совокупность всех его связанных между собой звеньев, так и любую часть механизма и, в частности, отдельное звено механизма.

Все силы, действующие на точки данной системы, можно разделить на два вида: внутренние силы и внешние силы.

Внутренними силами называются силы, с которыми действуют друг на друга точки или тела данной системы. Внутреннюю силу системы будем обозначать в дальнейшем через P^i . Внешними силами называются силы, с которыми действуют на точки данной системы

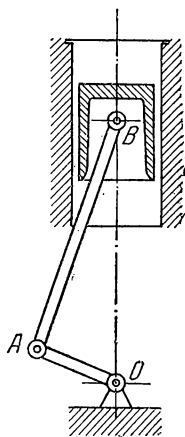


Рис. 240.

точки или тела, не входящие в состав данной системы. Внешнюю силу, действующую на систему, будем обозначать в дальнейшем через P^e ¹⁾).

Деление сил на внутренние и внешние условно и зависит от того, что включено в состав рассматриваемой системы. Так, рассматривая в предыдущем примере поршень B как отдельную систему, мы должны будем силы, действующие на него со стороны других звеньев механизма (цилиндра двигателя и шатуна AB), считать внешними силами. Внутренними силами в данном случае будут лишь силы взаимодействия между частями самого поршня. Принимая же за систему весь кривошипно-ползунный механизм двигателя, мы должны отнести уже к внутренним силам и силы взаимодействия между отдельными его звеньями. Давление газов на поршень двигателя является по отношению к кривошипно-ползунному механизму внешней силой. Если же,

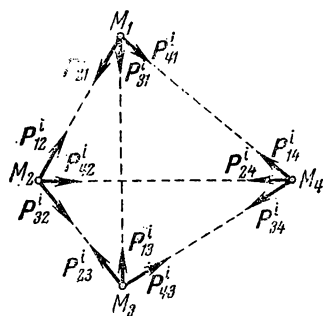


Рис. 241.

рассматривая движение автомобиля в целом, принять автомобиль вместе с двигателем за одну систему, то давление газов на поршень двигателя будет уже внутренней силой. Внешними же силами для такой системы будут: вес автомобиля, нормальная реакция дороги, сила трения между колесами автомобиля и поверхностью дороги, сопротивление воздуха.

По закону равенства действия и противодействия силы взаимодействия между всякими двумя материальными точками всегда равны по модулю и противоположны по направлению.

Представим себе точки M_1, M_2, M_3, M_4 (рис. 241) какой-либо системы. Сила P_{12}^i , с которой точка M_1 системы действует на точку M_2 той же системы, будет, очевидно, равна по модулю и прямо противоположна по направлению силе P_{21}^i , с которой точка M_2 действует на точку M_1 . Сила P_{13}^i , с которой точка M_1 действует на

¹⁾ i — начальная буква французского слова «interior» — внутренний; e — начальная буква французского слова «exterior» — внешний.

точку M_3 , будет равна по модулю и противоположна по направлению силе P_{31}^i , с которой точка M_3 действует на точку M_1 . Аналогично $P_{14}^i = -P_{41}^i$, $P_{24}^i = -P_{42}^i$ и т. д. Комбинируя попарно силы взаимодействия между всеми точками данной системы (внутренние силы системы), мы приходим, таким образом, к следующему выводу: *геометрическая сумма всех внутренних сил всякой системы равна нулю*:

$$\sum P_k^i = 0. \quad (165)$$

Из последнего равенства следует, что и *алгебраическая сумма проекций на любую ось всех внутренних сил системы также равна нулю*:

$$\sum X_k^i = 0, \quad \sum Y_k^i = 0, \quad \sum Z_k^i = 0. \quad (166)$$

Полученные выводы [формулы (165) и (166)] в ряде случаев значительно упрощают исследование вопросов, относящихся к системе материальных точек, так как они позволяют в некоторых случаях совсем не принимать в расчет внутренние силы системы.

§ 99*. Закон сохранения количества движения системы

Количеством движения системы Q называется геометрическая сумма векторов количеств движения всех точек системы:

$$Q = \sum m_k v_k, \quad (167)$$

где m_k — масса какой-либо точки системы, v_k — вектор скорости этой точки.

Так как проекция геометрической суммы векторов на любую ось равна алгебраической сумме проекций на ту же ось составляющих векторов, то

$$Q_x = \sum m_k v_{kx}. \quad (168)$$

Проекция количества движения системы на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций на эту ось количеств движения всех точек системы.

Воспользуемся формулой (160), установленной в § 95 для движения одной материальной точки:

$$\frac{d}{dt} m v_x = X,$$

где X — проекция равнодействующей всех сил, действующих на точку.

Силы, действующие на точки системы, разделим на внешние и внутренние. Проекцию на ось x равнодействующей внешних сил, приложенных к какой-либо k -й точке системы с массой m_k , обозначим через X_k^e , а проекцию на ту же ось равнодействующей внутренних сил, приложенных к той же точке, обозначим через X_k^i . Проекцию на ось x скорости данной точки обозначим через v_{kx} .

На основании формулы (160) можно написать для выбранной точки системы

$$\frac{d}{dt} m_k v_{kx} = X_k^e + X_k^i.$$

Написав аналогичные равенства для всех точек данной системы и сложив их почленно, получим

$$\sum \frac{d}{dt} m_k v_{kx} = \sum X_k^e + \sum X_k^i.$$

Но, как было установлено в предыдущем параграфе, сумма проекций на любую ось всех внутренних сил системы $\sum X_k^i = 0$. Сумма же производных равна, как известно, производной от суммы слагаемых. На основании этого можно записать

$$\frac{d}{dt} \sum m_k v_{kx} = \sum X_k^e. \quad (169)$$

Производная от проекции количества движения системы на какую-либо неподвижную ось равна сумме проекций на ту же ось всех внешних сил, действующих на систему. Так как производная от постоянной величины равна нулю, то из равенства (169) следует, что

$$\sum m_k v_{kx} = \text{const, если } \sum X_k^e = 0. \quad (170)$$

Если в течение некоторого времени сумма проекций на какую-либо неподвижную ось всех внешних сил системы остается равной нулю¹⁾, то проекция на эту ось

¹⁾ Геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, может при этом быть и не равной нулю. Например, если на систему действуют только вертикальные силы (хотя бы и направленные все в одну сторону), то сумма их проекций на горизонтальную ось равна нулю.

количества движения системы все это время сохраняется постоянной.

Очевидно, что если будет равна нулю геометрическая сумма всех внешних сил системы, $\sum \mathbf{P}_k^e = 0$, то будет равна нулю и сумма проекций этих сил на любую ось. Следовательно, в этом случае будет постоянной и проекция количества движения системы, и притом также на любую ось. Последнее же возможно лишь тогда, когда будет постоянно и само количество движения системы, т. е. когда геометрическая сумма векторов количеств движения всех точек системы будет сохранять постоянным как свой модуль, так и направление.

Из данного положения, выражающего собой весьма важный закон сохранения количества движения системы, следует, что *внутренние силы не могут изменять общего количества движения системы.*

Так, если рассматривать орудие и снаряд как одну систему, то давление пороховых газов при выстреле будет внутренней силой. Давление газов, сообщая некоторое количество движения снаряду, одновременно сообщает орудию такое же количество движения, направленное в противоположную сторону. Это вызывает явление так называемой отдачи (отката) орудия, если, конечно, оно не укреплено неподвижно, т. е. если нет внешнего противодействия такому откату.

Явлением отдачи объясняется и ускоренное движение ракеты. Продукты сгорания топлива выбрасываются из ракеты с большой скоростью назад. Так как силы давления газов являются для данной системы также внутренними силами, то они не могут изменить общего количества движения системы, и потому ракета движется при этом в противоположную сторону — вперед.

Задача 112. Из орудия массой $m_1 = 125\,000$ кг, расположенного на гладкой горизонтальной платформе, вылетает в горизонтальном направлении снаряд массой $m_2 = 350$ кг со скоростью $v_2 = 550$ м/с. Определить скорость орудия после выстрела (скорость свободного отката).

Решение. Так как давление пороховых газов в канале орудия является внутренней силой, то действующими на систему (орудие и снаряд) внешними силами являются только силы тяжести орудия и снаряда и нормальная реакция платформы. Эти внешние силы вертикальны, и потому сумма $\sum X_k^e$ их проекций на горизонтальную ось x равна нулю. В этом случае, согласно уравнению (170),

$$\text{13*} \quad \sum m_k v_{kx} = \sum m_k v_{0kx} = \text{const.}$$

До выстрела система была неподвижна, и потому $\sum m_k v_{0kx} = 0$. Отсюда следует, что и после выстрела проекция на горизонтальную ось x количества движения системы

$$\sum m_k v_{kx} = m_1 v_{1x} + m_2 v_2 = 0.$$

Из последнего равенства находим проекцию искомой скорости свободного отката орудия:

$$v_{1x} = -\frac{m_2}{m_1} v_2 = -\frac{350}{125\,000} \cdot 550 = -1,54 \text{ м/с}.$$

Знак минус указывает на то, что скорость v_1 отката орудия направлена противоположно скорости v_2 снаряда.

§ 100 * Центр масс системы. Теорема о движении центра масс системы

Центром масс системы называется геометрическая точка C , положение которой определяется следующими координатами:

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}. \quad (171)$$

В этих формулах m_k — масса одной произвольной точки системы, x_k, y_k, z_k — координаты этой точки $\sum m_k x_k, \sum m_k y_k, \sum m_k z_k$ — алгебраические суммы, составленные из произведений массы каждой точки данной системы на соответствующие ее координаты, M — масса всей системы.

Каждой из формул (171) можно придать другой вид, если умножить числитель и знаменатель ее правой части на ускорение g свободно падающего тела. В этом случае будем иметь

$$x_C = \frac{g \sum m_k x_k}{Mg} = \frac{\sum m_k g x_k}{Mg}.$$

Но произведение $m_k g$ равно весу G_k одной материальной частицы (материальной точки), и произведение Mg равно весу G всей системы. Подставив эти значения в предыдущую формулу и написав аналогичные выражения для двух других координат центра масс, получим

$$x_C = \frac{\sum G_k x_k}{G}, \quad y_C = \frac{\sum G_k y_k}{G}, \quad z_C = \frac{\sum G_k z_k}{G}.$$

Последними же формулами определяются, как известно из статики (§ 46, формулы (48)), координаты центра тяжести тела. Однако понятия центра тяжести и центра масс не являются тождественными.

Центр тяжести системы есть точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести всех материальных точек данной системы. Понятие центра тяжести применимо, следовательно, только к таким системам, которые находятся в поле земного тяготения, и лишено всякого смысла, например, для такой системы тел, как солнечная. Положение же центра масс, определяемое в каждый данный момент времени формулами (171), зависит только от масс точек системы и положения этих точек в данный момент времени. Понятие центра масс сохраняет свой смысл для любой механической системы, независимо от того, какие силы на нее действуют, и, следовательно, является более широким понятием, чем понятие о центре тяжести.

Рассмотрим движение материальной системы.

Из формулы (171) $x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}$ для координаты центра масс системы имеем

$$Mx_C = \sum m_k x_k,$$

где M — масса всей системы, x_C — изменяющаяся со временем координата центра масс движущейся системы, m_k — масса одной какой-либо k -й точки системы и x_k — также изменяющаяся со временем координата этой точки системы.

Взяв производные по времени от обеих частей данного равенства, получим

$$M \frac{dx_C}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k x_k = \sum m_k \frac{dx_k}{dt}.$$

Но производная dx_C/dt есть проекция v_{Cx} на ось x скорости v_C центра масс, а производная dx_k/dt есть проекция v_{kx} на ту же ось скорости k -й точки системы. Подставляя эти значения в предыдущее равенство, будем иметь

$$\sum m_k v_{kx} = Mv_{Cx}. \quad (172)$$

Проекция на какую-либо ось количества движения системы равна проекции на ту же ось количества

движения центра масс этой системы, если предположить, что в центре масс сосредоточена вся масса системы.

Возьмем еще раз производные от обеих частей равенства (172). Учитывая, что производная dv_{cx}/dt от проекции скорости точки равна проекции на ту же ось ускорения a_{cx} этой точки, получим

$$\frac{d}{dt} \sum m_k v_{kx} = M \frac{dv_{cx}}{dt} = Ma_{cx}. \quad (I)$$

С другой стороны, согласно формуле (169) имеем, что

$$\frac{d}{dt} \sum m_k v_{kx} = \sum X_k^e. \quad (II)$$

Так как левые части равенств (I) и (II) равны между собой, то, очевидно, равны и их правые части. Следовательно,

$$Ma_{cx} = \sum X_k^e.$$

Совершенно аналогично можно преобразовать выражения и для двух других координат y_c и z_c центра масс. Таким образом, мы получаем следующие три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} Ma_{cx} &= \sum X_k^e, \\ Ma_{cy} &= \sum Y_k^e, \\ Ma_{cz} &= \sum Z_k^e. \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

Правые части этих равенств представляют собой проекции на координатные оси вектора $\sum \mathbf{P}_k^e$ геометрической суммы всех внешних сил, действующих на систему, левые же их части представляют собой проекции на те же оси вектора $M\mathbf{a}_c$, т. е. произведения массы системы на вектор \mathbf{a}_c ускорения ее центра масс. Равенство проекций этих векторов на три координатные оси говорит о равенстве самих векторов. Следовательно, три уравнения (173) выражают собой в координатной форме одно векторное равенство

$$M\mathbf{a}_c = \sum \mathbf{P}_k^e. \quad (174)$$

Сравнивая полученное уравнение (174) с основным уравнением (122) динамики для отдельной материаль-

ной точки, нетрудно сделать заключение о том, что уравнение (174) движения центра масс представляет собой уравнение движения материальной точки массы M , к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Таким образом, теорему о движении центра масс системы можно сформулировать так:

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все действующие на данную систему внешние силы, причем эти силы переносятся в центр масс без изменения их модуля и направления.

Рассмотрим ряд вытекающих из данной теоремы важных следствий.

1. При поступательном движении твердого тела его центр тяжести, совпадающий с центром масс, движется так же, как и все остальные точки этого тела. Определив движение центра масс такого тела на основании теоремы о движении этой точки, мы тем самым определяем, следовательно, и движение всего тела. Таким образом, как это мы и делали уже при решении задач, *при исследовании поступательного движения тела его можно рассматривать как материальную точку, сосредоточив всю массу тела в его центре тяжести и перенеся в нее все внешние силы, действующие на тело.*

Если тело движется не поступательно, то можно разложить это сложное движение на поступательное движение вместе с центром тяжести и на вращательное движение вокруг центра тяжести. Поступательная часть такого сложного движения тела также вполне определяется теоремой о движении центра масс тела, т. е. уравнением (174). Отсюда следует, что можно принимать за материальную точку тело конечных размеров и в случае его непоступательного движения, но только тогда, когда вращательная часть этого движения нами не рассматривается. Так, например, поступают в астрономии при исследовании поступательной части движения планет.

2. В уравнение (174) движения центра масс внутренние силы системы, т. е. силы взаимодействия между точками данной системы, не входят. Отсюда следует, что *внутренние силы системы не влияют на движение ее центра масс*, так же как они не влияют на общее количество движения системы.

3. Если $\sum \mathbf{P}_k^e = 0$, то, как следует из уравнения (174), $\mathbf{a}_c = 0$, и потому $\mathbf{v}_c = \text{const}$, т. е. в этом случае скорость центра масс постоянна как по модулю, так и по направлению. В частности, если начальная скорость \mathbf{v}_c центра масс была равна нулю, то центр масс будет оставаться в покое.

Следовательно, если в течение некоторого времени геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на систему, остается равной нулю, то центр масс данной системы все это время будет оставаться в покое или двигаться прямолинейно и равномерно.

4. Если $\sum X_k^e = 0$, то, как следует из уравнения (173), $\mathbf{a}_{cx} = 0$, и потому $\mathbf{v}_{cx} = d\mathbf{x}_c/dt = \text{const}$.

Следовательно, если в течение некоторого времени сумма проекций на какую-либо ось всех внешних сил, действующих на систему, остается равной нулю, то проекция скорости центра масс на данную ось все это время остается постоянной. В частности, если в начальный момент проекция на данную ось скорости центра масс $\mathbf{v}_{cx} = d\mathbf{x}_c/dt = 0$, то соответствующая координата центра масс будет оставаться постоянной ($\mathbf{x}_c = \text{const}$).

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие данные положения.

1. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то единственной внешней силой, действующей на снаряд при полете, будет сила тяжести снаряда. Поэтому центр тяжести снаряда движется так же, как и всякая материальная точка, брошенная (в пустоте) под углом к горизонту, т. е. по параболе. При разрыве снаряда во время полета осколки снаряда разлетаются в разные стороны, но их центр масс продолжает прежнее движение, пока хотя бы один из осколков не достигнет земли, в результате чего к внешним силам, действующим на систему, присоединится реакция земли, что изменит движение центра масс. Возникающие при взрыве снаряда силы суть внутренние силы, и потому они не могут изменить движение его центра масс.

2. Человек, стоящий на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности, не может сам передвинуться в горизонтальном направлении. Внешними силами для системы, которую представляет собой человек, будут вес человека и нормальная реакция гладкой горизонтальной плоскости. Обе эти силы вертикальны, и потому сумма

их проекций на любую горизонтальную ось равна нулю. Следовательно, равна нулю и проекция ускорения центра тяжести человека на эту ось. Если человек вначале стоял неподвижно, то из-за отсутствия горизонтальных внешних сил горизонтальная скорость его центра тяжести будет оставаться равной нулю и в дальнейшем. Никакими внутренними усилиями нельзя переместить центр тяжести системы. Как только человек вынесет вперед одну ногу, другая нога сейчас же отодвинется назад, и, следовательно, его общий центр тяжести будет оставаться на месте¹⁾. В действительных условиях хождение человека по горизонтальной плоскости возможно только благодаря внешней горизонтальной силе, возникающей вследствие трения между этой плоскостью и подошвами ног. Когда человек выносит одну ногу вперед, другая стремится назад; но этому мешает трение подошвы ноги о плоскость, почему нога и остается на месте (или почти на месте).

Аналогичным образом объясняется и движение в горизонтальном направлении тепловоза, автомобиля и т. д. Давление газа на поршень двигателя тепловоза есть по отношению к тепловозу внутренняя сила и потому не может сообщить движение его центру тяжести²⁾. Движение поезда возможно лишь благодаря трению между рельсами и ведущими колесами тепловоза. Своими неровностями и шероховатостями эти колеса (рис. 242) упираются в рельс и испытывают со стороны его обратное давление. Это давление, т. е. сила трения, приложенная со стороны рельса к ведущему колесу и направленная в сторону движения тепловоза, и является той необходимой горизонтальной внешней силой, которая вызывает перемещение центра тяжести тепловоза.

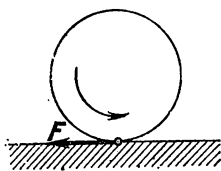


Рис. 242.

Выше мы говорили, что внутренние силы системы не могут сами изменять движение ее центра масс и общее количество движения системы. Однако из рассмотренных

¹⁾ Некоторое приближение к этому явлению мы имеем при движении по достаточно гладкому льду.

²⁾ Если подвесить тепловоз на цепях и пустить в ход его двигатель, то корпус тепловоза будет получать лишь небольшие горизонтальные отклонения, в направлении, обратном движению поршня, центр же его тяжести остается неподвижным.

примеров видно, что, вызывая движение отдельных частей системы и их воздействие на окружающие данную систему внешние тела и материальную среду, они могут вызывать возникновение внешних для данной системы сил, которые будут изменять движение центра масс системы и ее общее количество движения.

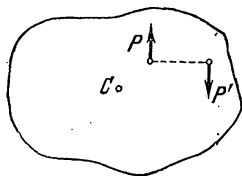


Рис. 243.

3. Приложим к неподвижному твердому телу (рис. 243), имеющему возможность свободно перемещаться в пространстве, пару сил (P, P') . Так как геометрическая сумма сил пары равна нулю, то она не может сообщить ускорения центру масс тела и он должен остаться неподвижным. Этим и объясняется то обстоятельство, что пара сил всегда сообщает свободному телу вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела.

Задача 113. На одном конце B лодки (рис. 244), находящейся в покое, стоит человек; он переходит затем на другой ее конец, в точку A . Определить, пренебрегая сопротивлением воды, на какое расстояние передвинется при этом лодка, если вес лодки $G_1 =$

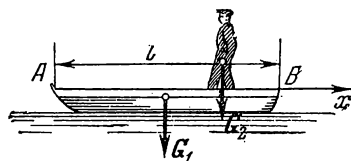


Рис. 244.

$= 1,5$ кН, вес человека $G_2 = 0,5$ кН, а длина лодки $AB = l = 4$ м.

Решение. На лодку с человеком действуют только вертикальные внешние силы G_1 и G_2 и также вертикальная выталкивающая сила воды. Сумма их проекций на горизонтальную ось x равна нулю, следовательно, на основании теоремы о движении центра масс горизонтальная скорость центра масс данной системы (лодки и человека) должна быть постоянной. Так как вначале система была неподвижна, то центр масс ее должен остаться неподвижным и при перемещении человека.

Возьмем за неподвижное начало координат первоначальное положение точки A . Абсцисса центра масс системы в первоначальном положении системы равна

$$x'_C = \frac{G_1 \frac{l}{2} + G_2 l}{G_1 + G_2}.$$

Допустим, что при перемещении человека из конца B лодки в конец ее A лодка перемещается вправо на расстояние S . Тогда абсцисса центра тяжести системы в новом ее положении (при том же

начале координат) будет равна

$$x''_C = \frac{G_1 \left(S + \frac{l}{2} \right) + G_2 S}{G_1 + G_2}.$$

Так как центр тяжести системы остается неподвижным, то $x'_C = x''_C$. Отсюда получаем, что

$$\frac{G_1 \frac{l}{2} + G_2 l}{G_1 + G_2} = \frac{G_1 \left(S + \frac{l}{2} \right) + G_2 S}{G_1 + G_2}.$$

Решая это уравнение относительно S , находим

$$S = \frac{G_2 l}{G_1 + G_2} = \frac{0,5 \cdot 4}{1,5 + 0,5} = 1 \text{ м.}$$

§ 101. Основное уравнение динамики для вращательного движения твердого тела

Пусть твердое тело, имеющее возможность вращаться вокруг неподвижной оси z , находится под действием приложенной к нему системы сил P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 245). Условием равновесия тела, имеющего неподвижную ось, является, как известно из статики (§ 43), равенство нулю алгебраической суммы моментов всех приложенных к телу активных сил P_1, P_2, \dots, P_n относительно оси z вращения тела.

Если же эта сумма моментов не будет равна нулю, то тело будет вращаться вокруг оси z с некоторым угловым ускорением $\varepsilon = d\omega/dt$, знак которого, очевидно, совпадает со знаком главного момента приложенных к телу сил.

Чтобы определить угловое ускорение тела, воспользуемся методом кинестатики. Условно присоединив к приложенным к телу активным силам силы инерции всех его частиц, мы можем применить к полученной системе сил соответствующее условие равновесия. В рассматриваемом случае вращения тела вокруг неподвижной

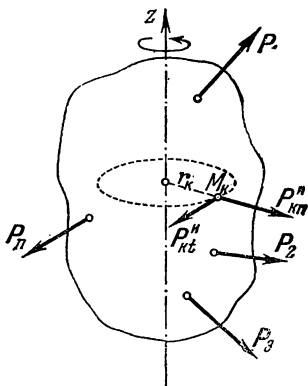


Рис. 245.

оси это условие принимает следующий вид: сумма моментов приложенных к телу активных сил и сил инерции всех его частиц относительно оси вращения тела должна равняться нулю.

Разобьем данное тело на элементарные материальные частицы. Обозначим массу одной из таких частиц M_k (рис. 245) через m_k , а ее расстояние до оси через r_k . Силу инерции каждой такой частицы разложим на составляющие: центробежную, равную по модулю $P_{kn}^n = m_k r_k \omega^2$ и направленную по радиусу от центра, и касательную, равную по модулю $P_{kt}^n = m_k r_k \epsilon$ и направленную по перпендикуляру к радиусу в сторону, противоположную касательному ускорению. Направление сил P_{kn}^n и P_{kt}^n показаны на рис. 245; при этом мы считаем, что главный момент приложенных к телу сил P_1, P_2, \dots, P_n положителен (т. е. он вращает тело против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси z), а следовательно, положительно и угловое ускорение ϵ . При отрицательном угловом ускорении направление касательной силы инерции изменится на противоположное.

Все центробежные силы инерции пересекают ось z вращения тела, и, следовательно, моменты их относительно этой оси равны нулю. Касательная сила инерции частицы M_k дает относительно оси вращения тела момент ¹⁾

$$m_z(P_{kt}^n) = -P_{kt}^n r = -m_k r_k^2 \epsilon.$$

Составляя сумму моментов касательных сил инерции для всех элементарных частиц тела, будем иметь

$$\sum m_z(P_{kt}^n) = -\sum m_k r_k^2 \epsilon = -\epsilon \sum m_k r_k^2,$$

где угловое ускорение ϵ тела вынесено, как общий множитель, за знак суммы.

Обозначим $\sum m_k r_k^2$ через J и назовем моментом инерции тела относительно его оси вращения.

Моментом инерции J тела относительно какой-либо оси называется сумма, составленная из произведений

¹⁾ В случае отрицательного главного момента сил P_1, P_2, \dots, P_n угловое ускорение ϵ тела будет отрицательным и момент $m_z(P_{kt}^n)$ будет положительным. Таким образом, знак момента касательной силы инерции всегда будет противоположен знаку момента приложенных к телу сил.

массы m_k каждой частицы тела на квадрат расстояния r_k этой частицы до данной оси.

Следовательно, сумма моментов сил инерции всех материальных частиц тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна

$$\sum m_z (\mathbf{P}_k^n) = -J\varepsilon. \quad (175)$$

Прибавляя эту сумму к сумме моментов всех приложенных к телу активных сил, мы получим, в соответствии с установленным выше условием, следующее равенство:

$$\sum m_z (\mathbf{P}_k) + \sum m_z (\mathbf{P}_k^n) = \sum m_z (\mathbf{P}_k) - J\varepsilon = 0.$$

Для краткости будем называть алгебраическую сумму моментов всех приложенных к телу активных сил относительно оси z вращения тела *вращающим моментом* и обозначать его через $M_{вр}$:

$$M_{вр} = \sum m_z (\mathbf{P}_k). \quad (176)$$

Таким образом, приходим к следующему равенству:

$$M_{вр} = J\varepsilon. \quad (177)$$

Вращающий момент $M_{вр}$, приложенный к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равен моменту инерции тела J относительно этой оси, умноженному на угловое ускорение ε тела. Уравнение (177) называется основным уравнением динамики для вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Так как момент инерции J данного тела относительно данной оси есть величина постоянная, то, как это следует из уравнения (177), при постоянном вращающем моменте $M_{вр}$ угловое ускорение ε есть величина постоянная, т. е. тело совершает равномерно переменное вращение.

Из того же уравнения следует, что если приложенный к телу вращающий момент $M_{вр}$ равен нулю, то угловое ускорение тела ε также равно нулю, т. е. тело либо остается в покое (если оно находилось в нем до того), либо вращается с постоянной угловой скоростью.

Так, если момент приложенных к валу машины движущих сил равен по величине ¹⁾ моменту сил сопротив-

¹⁾ Знак момента сил сопротивления всегда противоположен знаку момента движущих сил.

ления, то вал будет вращаться равномерно. Если момент движущих сил больше момента сил сопротивления, то вал вращается ускоренно. Если момент движущих сил будет меньше момента сил сопротивления, то вал будет вращаться замедленно.



Рис. 246.

Нетрудно заметить, что по своему виду основное уравнение (177) динамики для вращательного движения тела напоминает основное уравнение (127) динамики для материальной точки (или, что то же, для поступательного движения тела):

$$P = ma.$$

В уравнении (177) вместо модуля P силы стоит момент $M_{\text{вр}}$ силы (вращающий момент), вместо массы m — момент инерции J , вместо модуля линейного ускорения a — угловое ускорение ϵ .

Из сопоставления уравнений (177) и (127) видно, что момент инерции тела играет при его вращательном движении ту же роль, что масса тела при поступательном движении. Так же как масса тела является мерой инертности тела при его поступательном движении, так и момент инерции тела относительно данной оси является

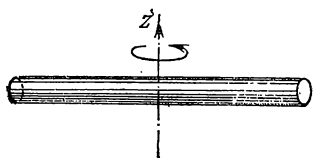


Рис. 247.

мерой инертности тела при его вращательном движении вокруг этой оси.

При одном и том же вращающем моменте угловое ускорение тела будет тем меньше, чем больше момент инерции тела относительно оси вращения. Существенное отличие момента инерции тела от его массы заключается, однако, в том, что масса тела является для него величиной постоянной, тогда как момент инерции тела зависит не только от самой вращающейся массы, но и от распределения этой массы относительно оси вращения. Например, одну и ту же длинную палку значительно легче привести руками в быстрое вращение вокруг ее продольной оси (рис. 246), чем вокруг оси, перпендикулярной к ее длине (рис. 247). Объясняется это тем, что в первом случае момент инерции палки значительно меньше, чем во втором. Поэтому для сообще-

ния одинакового углового ускорения в первом случае потребуется значительно меньший вращающий момент.

Это же обстоятельство хорошо иллюстрируется при помощи вращающейся на шариках (для уменьшения трения) скамейки, так называемой скамейки Н. Е. Жуковского. Человек (рис. 248), стоящий на приведенной во вращение при помощи толчка скамейке, может изменять ее угловую скорость, изменяя распределение масс и тем самым изменяя момент инерции системы относительно оси ее вращения. Вращение системы будет заметно ускоряться, если человек будет сдвигать руки (с гирями) к груди, и, наоборот, замедляться, если он будет удалять гири от оси вращения системы.

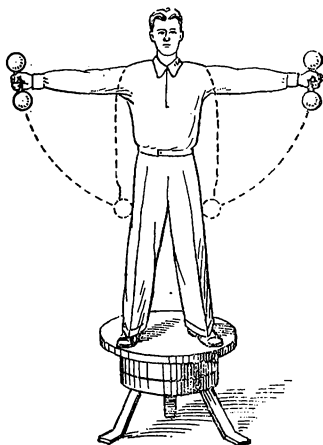


Рис. 248.

Колесо с тяжелым ободом и легкой втулкой будет обладать большим моментом инерции, чем колесо той же массы, но обратное распределенной, т. е. с тяжелой втулкой и легким ободом, так как в первом случае большая часть массы находится на наибольшем расстоянии от оси вращения. А так как чем значительнее момент инерции тела, тем труднее изменить его движение, то этим и пользуются в маховиках, служащих для выравнивания хода машин, делая их значительного диаметра и распределяя большую часть их массы по ободу.

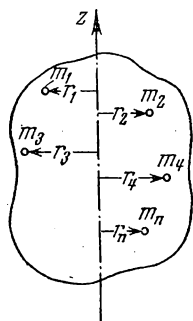
§ 102. Момент инерции тела

Для того чтобы найти момент инерции твердого тела относительно какой-либо его оси z (рис. 249), необходимо разбить все тело на очень большое число n очень малых частиц, составить сумму из произведений массы каждой частицы тела на квадрат расстояния этой частицы до данной оси и затем вычислить предел этой суммы, предполагая, что число n частиц, на которое разбито тело, стремится к бесконечности, а масса

каждой частицы стремится к нулю:

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n m_k r_k^2.$$

Иногда момент инерции J тела относительно какой-либо его оси определяют просто как сумму, составленную из произведений массы m_k каждой частицы тела на квадрат расстояния этой частицы от данной оси:



$$J = \sum m_k r_k^2. \quad (178)$$

Следует иметь в виду, что это равенство приближенное.

Момент инерции имеет, очевидно, следующую размерность:

$$[J] = [\text{масса}] \cdot [\text{длина}]^2.$$

Рис. 249.

Иногда бывает удобно момент инерции J тела относительно оси представить в виде произведения массы M тела на квадрат длины некоторого отрезка r_n , называемого *радиусом инерции* тела относительно данной оси:

$$J = M r_n^2. \quad (179)$$

Если момент инерции тела относительно оси найден (путем вычисления или из опыта), то радиус инерции тела относительно этой оси легко находится из предыдущей формулы:

$$r_n = \sqrt{\frac{J}{M}}. \quad (180)$$

Очевидно, что под радиусом инерции тела относительно данной оси можно понимать длину отрезка, равного расстоянию от данной оси до точки, в которой нужно сосредоточить всю массу M тела, чтобы получить момент инерции этой точки, равный моменту инерции тела относительно данной оси.

Формулы для вычисления моментов инерции однородных тел различной геометрической формы можно найти в технических справочниках. Вывод этих формул для некоторых однородных тел простейшей геометрической формы дан ниже, в § 104*. Для тел неоднородных

или имеющих сложное очертание моменты инерции находят обычно экспериментальным путем.

Задача 114. Для нахождения момента сил трения в подшипниках на вал насажен маховик массой $M = 1000$ кг и ему сообщена угловая скорость $n = 300$ об/мин. Представленный самому себе, маховик останавливается через $T = 100$ с. Радиус инерции маховика $r_{\pi} = 1,5$ м. Определить момент трения, считая его постоянным.

Решение. Согласно основному уравнению (177) для вращательного движения твердого тела $M_{\text{вр}} = J\varepsilon$.

Приложенный к маховику вращающий момент (момент трения) постоянен, поэтому вращение маховика будет равномерно переменным. Угловое ускорение равномерно переменного вращающегося определяется, как известно, формулой (104):

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}.$$

В данном случае при $t = T = 100$ с угловая скорость маховика $\omega = 0$, начальная же его угловая скорость (в радианах в секунду)

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30}.$$

Отсюда угловое ускорение маховика

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{T} = -\frac{\pi n}{30T} = -\frac{3,14 \cdot 300}{30 \cdot 100} \approx -0,31 \text{ рад/с}^2.$$

Знак минус показывает, что в данном случае имеет место замедленное вращение.

Момент инерции маховика находим по формуле (179):

$$J = Mr_{\pi}^2 = 1000 \cdot 1,5^2 = 2250 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Следовательно, искомый момент трения будет равен

$$M_{\text{вр}} = J\varepsilon = -2250 \cdot 0,31 = 397,5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Знак момента трения говорит о том, что он направлен в сторону, противоположную вращению маховика.

Задача 115. Шкив (рис. 250) получает вращение от другого (ведущего) шкива при помощи ременной передачи. Ведущая ветвь ремня натянута с силой $T = 98$ Н, ведомая ветвь — с силой $t = 49$ Н. Масса шкива $M = 200$ кг, его диаметр $D = 0,4$ м. Определить угловое ускорение шкива, принимая во внимание трение вала в подшипниках. Диаметр вала $d = 0,06$ м, коэффициент трения $f = 0,1$. Весом вала пренебречь. Шкив считать сплошным однородным цилиндром.

Решение. Вес шкива $G = Mg = 200 \cdot 9,81 = 1962$ Н. Сила трения вала в подшипниках $F = fG = 0,1 \cdot 1962 = 196,2$ Н.

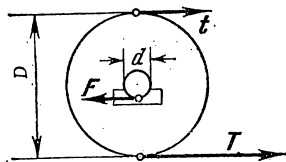


Рис. 250.

Вращающий момент $M_{вр}$ равен алгебраической сумме моментов всех приложенных к шкиву сил относительно оси его вращения:

$$M_{вр} = \sum m_z(P_k) = T \frac{D}{2} - t \frac{D}{2} - F \frac{d}{2} = \\ = (98 - 49) \frac{0,4}{2} - 196,2 \cdot \frac{0,06}{2} = 3,93 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Момент инерции шкива (сплошного однородного цилиндра) находим по приводимой ниже (§ 104*) формуле (184):

$$J_z = \frac{MR^2}{2} = \frac{MD^2}{8} = \frac{200 \cdot 0,4^2}{8} = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Зная приложенный к шкиву вращающий момент и момент инерции шкива относительно его оси вращения, легко найти по основному уравнению (177) динамики для вращательного движения тела его угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{M_{вр}}{J_z} = \frac{3,93}{4} \approx 0,98 \text{ рад/с}^2.$$

§ 103*. Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей

Момент $J_{z'}$ инерции тела относительно какой-либо оси z' равен моменту J_z инерции этого тела относительно оси z , проходящей через центр масс тела и параллельной данной оси z' , сложенному с произведением массы M тела на квадрат расстояния d между этими осями.

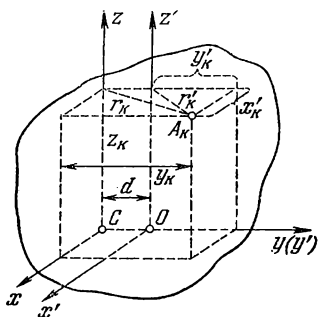


Рис. 251.

Доказательство. Примем центр C масс тела за начало системы координатных осей $Sxyz$. Ось Sy проведем так, чтобы она пересекла ось z' в некоторой точке O , которую примем за начало новой системы координатных осей $Ox'y'z'$ (рис. 251). Расстояние между осями Cz и

Oz' обозначим через d . Возьмем теперь произвольную точку A_k тела массы m_k . Координаты этой точки в системе координатных осей $Sxyz$ обозначим через x_k, y_k, z_k . Координаты той же точки в системе координатных осей $Ox'y'z'$ обозначим через x'_k, y'_k и z'_k . Расстояние точки A_k до оси z обозначим через r_k и расстояние той же точки до оси z' — через r'_k .

Момент инерции тела относительно оси z' , согласно определению,

$$J_{z'} = \sum m_k r_k^2.$$

Но, как это ясно из рис. 251,

$$\begin{aligned} r_k'^2 &= x_k'^2 + y_k'^2 = x_k^2 + (y_k - d)^2 = (x_k^2 + y_k^2) - 2dy_k + d^2 = \\ &= r_k^2 - 2dy_k + d^2. \end{aligned}$$

Подставляя это значение в выражение для $J_{z'}$ будем иметь

$$J_{z'} = \sum m_k r_k'^2 = \sum m_k r_k^2 - 2d \sum m_k y_k + d^2 \sum m_k. \quad (I)$$

Здесь $\sum m_k r_k^2$ — момент инерции тела относительно центральной оси z .

Из формулы же (171), определяющей ординату y_c центра масс, находим

$$\sum m_k y_k = My_c,$$

где $\sum m_k = M$ — масса тела. Так как в данном случае $y_c = 0$, то и $\sum m_k y_k = 0$. Подставляя найденные значения в правую часть равенства (I), получаем

$$J_{z'} = J_z + Md^2. \quad (181)$$

Теорема доказана.

Зная момент инерции тела относительно какой-либо оси, проходящей через его центр масс, можно, пользуясь формулой (181), найти момент инерции этого тела относительно любой другой оси, параллельной данной.

Как это следует из той же формулы, момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела, меньше, чем момент инерции данного тела относительно любой другой оси, ей параллельной.

§ 104 *. Моменты инерции некоторых однородных тел простейшей геометрической формы

1. Момент инерции прямого однородного тонкого стержня постоянного поперечного сечения.

Под тонким стержнем понимается цилиндрическое или призматическое тело, поперечные размеры которого малы сравнительно с его длиной.

а) Вычислим момент инерции такого стержня AB относительно оси y , перпендикулярной к его длине и проходящей через конец (рис. 252).

Разобьем весь стержень длиной l на бесконечно большое число бесконечно малых отрезков; массу одного

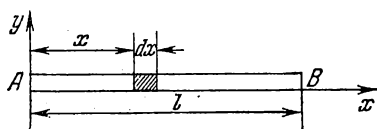


Рис. 252.

такого отрезка длиной dx , находящегося от оси y на расстоянии x , обозначим через dm . Если обозначить линейную плотность стержня, т. е. массу, приходящуюся на единицу

длины стержня, через γ , то $dm = \gamma dx$. Составляя в соответствии со сказанным выше сумму из произведений массы каждого отрезка стержня на квадрат расстояния этого отрезка до данной оси и переходя к пределу, мы получим определенный интеграл

$$J_y = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l \gamma x^2 dx = \gamma \int_0^l x^2 dx = \frac{\gamma l^3}{3}.$$

Если обозначить массу всего стержня через M , то эта масса $M = \gamma l$. Отсюда линейная плотность стержня $\gamma = M/l$. Подставляя это значение плотности в найденное выражение момента инерции стержня, окончательно получаем

$$J_y = \frac{Ml^2}{3}. \quad (182)$$

Момент инерции прямого однородного тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной к длине стержня и проходящей через его конец, равен $1/3$ произведения массы стержня на квадрат его длины.

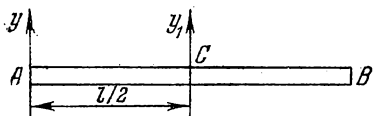


Рис. 253.

б) Найдем теперь момент инерции стержня относительно оси y_1 (рис. 253), перпендикулярной к его оси и проходящей через центр тяжести стержня (через середину стержня).

Согласно доказанной выше теореме о моментах инерции относительно параллельных осей мы имеем

$$J_y = J_{y_1} + Md^2.$$

Здесь $J_y = Ml^2/3$ — момент инерции стержня относительно оси y , перпендикулярной к его длине и проходящей через конец стержня, J_{y_1} — момент инерции стержня относительно оси y_1 , параллельной оси y и проходящей через центр тяжести стержня, M — масса стержня, $d = l/2$ — расстояние между параллельными осями y и y_1 .

Следовательно, искомый момент инерции стержня

$$J_{y_1} = J_y - Md^2 = \frac{Ml^2}{3} - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$J_{y_1} = \frac{Ml^2}{12}. \quad (183)$$

Момент инерции прямого однородного стержня относительно оси, перпендикулярной к длине стержня и проходящей через его середину, равен $1/12$ произведения массы стержня на квадрат его длины.

2. Момент инерции однородного сплошного круглого цилиндра относительно его оси вращения z .

Разобьем цилиндр радиуса R и высоты h (рис. 254) на бесконечно большое число бесконечно тонких цилиндрических слоев; массу одного такого цилиндрического слоя радиуса ρ и толщины $d\rho$ обозначим через dm .

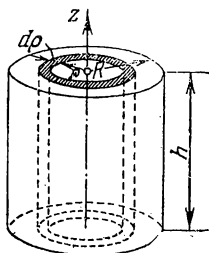


Рис. 254.

Если обозначить плотность цилиндра, т. е. массу, приходящуюся на единицу объема цилиндра, через γ , то $dm = \gamma \cdot 2\pi\rho h d\rho$. Составляя интегральную сумму из произведений массы каждого слоя цилиндра на квадрат его расстояния до оси, получим

$$\begin{aligned} J_z &= \int_0^R \rho^2 dm = \int_0^R 2\pi\rho\gamma h \rho d\rho = 2\pi h\gamma \int_0^R \rho^3 d\rho = \\ &= 2\pi h\gamma \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4 h \gamma}{2}. \end{aligned}$$

Если обозначить массу всего цилиндра через M , то эта масса $M = \pi R^2 h \gamma$. Отсюда объемная плотность цилиндра $\gamma = M/(\pi R^2 h)$. Подставляя это значение плотности

в найденное выражение момента инерции цилиндра относительно его оси вращения, окончательно получаем

$$J_z = \frac{MR^2}{2} = \frac{MD^2}{8}. \quad (184)$$

Момент инерции однородного сплошного круглого цилиндра относительно его оси вращения равен половине произведения массы цилиндра на квадрат его радиуса.

3. Момент инерции однородного полого круглого цилиндра относительно его оси вращения.

Обозначим наружный радиус полого цилиндра через R и его внутренний радиус через R_0 . Разбивая полый цилиндр на бесконечно большое число бесконечно тонких цилиндрических слоев, мы приходем, очевидно, к тому же самому определенному интегралу, что и в предыдущем случае, только с другими пределами интегрирования.

В случае, если цилиндр имеет полость радиуса R_0 , то переменный радиус ρ цилиндрических слоев, на которые мы разбиваем весь объем цилиндра, будет уже изменяться не от нуля до R , а только от R_0 до R . Следовательно,

$$\begin{aligned} J_z &= \int_{R_0}^R \rho^2 dm = 2\pi h \gamma \int_{R_0}^R \rho^3 d\rho = 2\pi h \gamma \frac{R^4 - R_0^4}{4} = \\ &= \frac{\pi h \gamma (R^2 + R_0^2)(R^2 - R_0^2)}{2}. \end{aligned}$$

Масса же полого цилиндра $M = (\pi R^2 - \pi R_0^2) h \gamma$, откуда объемная плотность этого цилиндра

$$\gamma = \frac{M}{\pi (R^2 - R_0^2) h}.$$

Подставляя это значение плотности в найденное выше выражение момента инерции полого цилиндра относительно его оси вращения, окончательно получаем

$$J_z = \frac{M(R^2 + R_0^2)}{2} = \frac{M(D^2 + D_0^2)}{8}. \quad (185)$$

Момент инерции однородного полого круглого цилиндра относительно его оси вращения равен половине

произведения массы цилиндра на сумму квадратов его наружного и внутреннего радиусов.

При приближенном вычислении моментов инерции полых цилиндрических тел с тонким ободом (например, маховых колес) иногда пренебрегают толщиной обода и считают всю массу тела равномерно распределенной по его внешней боковой поверхности. В этом случае в предыдущей формуле надо положить $R_0 = R$, и мы будем иметь

$$J_z = MR^2 = \frac{MD^2}{4}. \quad (186)$$

Момент инерции однородного тонкого обода (материальной окружности) относительно его оси вращения равен произведению массы обода на квадрат его радиуса.

§ 105. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий всех материальных точек системы.

Обозначая кинетическую энергию системы через T , будем иметь

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}. \quad (187)$$

Таким образом, чтобы найти кинетическую энергию системы в какой-либо момент, надо массу каждой точки системы умножить на половину квадрата ее скорости и полученные произведения сложить.

Применим установленную в § 97 теорему об изменении кинетической энергии материальной точки к системе таких точек. Для одной материальной точки мы имели равенство (164):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A,$$

где $mv^2/2$ и $mv_0^2/2$ — значения кинетической энергии точки соответственно в конце и начале пути точки, A — работа силы, приложенной к точке на том же пути.

Написав подобные равенства для всех точек системы и сложив их почленно, мы, очевидно, получим

$$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{0k}^2}{2} = \sum A_k.$$

Обозначая кинетическую энергию системы $\sum \frac{m_k v_{0k}^2}{2}$ в ее начальном положении через T_0 и кинетическую энергию системы $\sum \frac{m_k v_k^2}{2}$ в ее конечном положении через T , окончательно получим

$$T - T_0 = \sum A_k. \quad (188)$$

Изменение кинетической энергии при перемещении системы из одного положения в другое равно сумме работ всех сил (как внешних, так и внутренних), действовавших на систему при ее перемещении.

При вычислении суммы работ всех сил, действовавших на систему при ее перемещении, необходимо иметь в виду следующие обстоятельства¹⁾, чрезвычайно упрощающие практическое применение теоремы об изменении кинетической энергии во многих случаях.

1. При всяком перемещении твердого тела (т. е. системы, состояния между точками которой не изменяются) сумма работ его внутренних сил равна нулю.

2. Сумма работ реакций идеальных связей, неизменных во времени, при всяком перемещении системы, допускаемом этими связями, равна нулю.

Последнее обстоятельство автоматически исключает из уравнения кинетической энергии системы реакции идеальных связей. Если же связи не идеальные, т. е. трением в них пренебречь нельзя, то в сумму работ сил, приложенных к системе, нужно включить и работу сил трения.

§ 106. Кинетическая энергия твердого тела

При применении теоремы об изменении кинетической энергии системы очень часто приходится вычислять кинетическую энергию движущегося твердого тела. Найдем ее выражения при важнейших видах движения тела.

¹⁾ Обоснование их потребовало бы некоторых дополнительных, выходящих за рамки программы соображений, почему мы его и опускаем.

1. Тело движется поступательно

Если твердое тело движется поступательно, то скорости всех его точек в каждый момент равны между собой. Следовательно, в данном случае кинетическая энергия тела

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k.$$

Обозначая $\sum m_k$, т. е. сумму масс всех точек тела, через M , получаем

$$T = \frac{Mv^2}{2}. \quad (189)$$

Кинетическая энергия T поступательно движущегося твердого тела равна половине произведения массы M тела на квадрат его скорости v .

Таким образом, кинетическая энергия поступательно движущегося тела, как этого и можно было ожидать, вычисляется совершенно одинаково с кинетической энергией материальной точки.

По формуле (189) вычисляется также и кинетическая энергия любой системы¹⁾, движущейся так, что модули скоростей всех ее точек одинаковы.

2. Тело вращается вокруг неподвижной оси

Модуль v_k скорости любой k -й точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен, как известно, произведению угловой скорости ω тела на расстояние r_k данной точки от оси вращения тела: $v_k = \omega r_k$.

Следовательно, кинетическая энергия вращающегося тела

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \omega^2 r_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2.$$

Но $\sum m_k r_k^2$, т. е. сумма, составленная из произведений масс точек тела на квадраты их расстояний до оси вращения тела, есть не что иное, как момент инерции J тела относительно его оси вращения.

¹⁾ Например, ремня, охватывающего вращающиеся шкивы.

Следовательно, при данном движении тела

$$T = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (190)$$

Кинетическая энергия T тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции J тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости ω .

Сравнивая формулу (190) с формулой (189), можно заметить, что строение их аналогично. В формуле (190) роль массы играет момент инерции тела, а роль линейной скорости — угловая скорость тела.

3.* Тело совершает плоскопараллельное движение

Пусть тело совершает плоскопараллельное движение, т. е. все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Представим себе сечение тела (рис. 255) плоскостью, проходящей через центр тяжести C тела и параллельной плоскости. Допустим, что нам известна угловая скорость ω фигуры и скорость v_C ее центра тяжести.

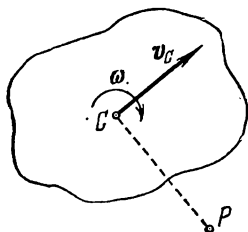


Рис. 255.

Зная это, нетрудно найти и положение мгновенного центра P скоростей фигуры. Он лежит, как известно из кинематики (§ 76), на перпендикуляре, восставленном из какой-либо точки фигуры к направлению скорости этой точки, на расстоянии, равном отношению линейной скорости данной точки к угловой скорости¹⁾ фигуры. Следовательно, расстояние

$$PC = \frac{v_C}{\omega}.$$

Как было показано в кинематике (§ 77), при плоскопараллельном движении тела скорости его точек в каждый момент распределяются так, как будто бы тело вращается в этот момент вокруг мгновенной оси, прохо-

¹⁾ Угловая скорость фигуры, как известно (стр. 295), от выбора полюса не зависит.

дящей через соответствующий данному моменту мгновенный центр скоростей фигуры и перпендикулярной к ее плоскости.

Но кинетическая энергия тела $T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$ зависит только от массы каждой его точки и ее скорости, и потому кинетическую энергию тела, совершающего плоскопараллельное движение, можно вычислить по формуле (190):

$$T = \frac{J_P \omega^2}{2}, \quad (I)$$

где J_P — момент инерции тела относительно его мгновенной оси вращения.

Пользование формулой (I) для нахождения кинетической энергии тела при его плоскопараллельном движении затрудняется тем, что требует для каждого момента времени определения положения мгновенной оси вращения тела и вычисления соответствующего ей момента инерции тела. Преобразуем поэтому формулу (I), воспользовавшись теоремой о моментах инерции относительно параллельных осей (§ 103*). Согласно этой теореме

$$J_P = J_C + M(PC)^2 = J_C + M \frac{v_C^2}{\omega^2}, \quad (II)$$

где J_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной мгновенной оси, M — масса тела, $PC = v_C/\omega$ — расстояние между рассматриваемыми параллельными осями.

Подставив выражение (II) момента инерции J_P тела относительно мгновенной оси в формулу (I) кинетической энергии, найдем

$$T = \frac{J_P \omega^2}{2} = \left(J_C + M \frac{v_C^2}{\omega^2} \right) \frac{\omega^2}{2}.$$

Раскрыв скобки и произведя сокращение, окончательно получим

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}. \quad (191)$$

Кинетическая энергия тела при его плоскопараллельном движении равна сумме тех кинетических энергий, которые имело бы данное тело при его поступательном

движении со скоростью центра масс тела и при его вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс тела и перпендикулярной к той неподвижной плоскости, параллельно которой движется тело.

Данную формулировку нетрудно запомнить, если принять во внимание установленное в кинематике (§ 74) положение о том, что всякое плоское движение может быть разложено на поступательное движение со скоростью полюса и вращательное движение вокруг полюса.

Только, в отличие от кинематики, выбор полюса здесь не произволен. При вычислении по формуле (191) кинетической энергии тела при его плоскопараллельном движении за полюс надо обязательно выбирать центр масс тела. Если за полюс принять другую точку тела, то мы получим иную, чем (191), формулу для его кинетической энергии.

Задача 116. Маховое колесо (рис. 256), вес обода которого $G = 80$ кН, имеет наружный диаметр $D = 4,6$ м и толщину обода $\delta = 30$ см. Какой вращающий момент нужно приложить к маховику, чтобы он через $\varphi_{05} = 200$ оборотов делал $n = 150$ об/мин?

Момент инерции спиц и втулки маховика принять равным 10% момента инерции его обода. Весом вала и трением в подшипниках пренебречь.

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии системы [уравнение (188)]

$$T - T_0 = \sum A.$$

Кинетическую энергию маховика в конце рассматриваемого периода его работы определяем по формуле (190): $T = J\omega^2/2$. Так как в начальный момент маховик был неподвижен, то его кинетическая энергия в этот момент

$$T_0 = \frac{J\omega_0^2}{2} = 0.$$

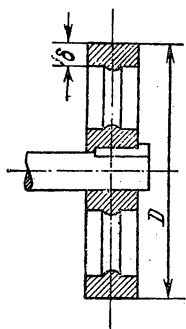


Рис. 256.

Изменение кинетической энергии маховика происходит только за счет приложенного к нему постоянного вращающего момента, работа которого, согласно формуле (153), равна

$$A = M_{вр}\varphi.$$

Таким образом, уравнение (188) кинетической энергии системы в данном случае принимает вид

$$\frac{J\omega^2}{2} = M_{вр}\varphi.$$

Отсюда вращающий момент

$$M_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2\varphi}.$$

Момент инерции J_1 обода маховика найдется из формулы (185) для полого круглого цилиндра:

$$J_1 = \frac{M(R^2 + R_0^2)}{2}.$$

Наружный радиус обода

$$R = \frac{D}{2} = \frac{4,6}{2} = 2,3 \text{ м.}$$

Внутренний радиус обода

$$R_0 = \frac{D}{2} - \delta = 2,3 - 0,3 = 2 \text{ м.}$$

Следовательно, момент инерции обода

$$J_1 = \frac{G(R^2 + R_0^2)}{2g} = \frac{80\,000(2,3^2 + 2^2)}{9,81 \cdot 2} \approx 37\,880 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент инерции спиц и втулки

$$J_2 = 3790 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент инерции всего маховика

$$J = J_1 + J_2 = 37\,880 + 3790 = 41\,670 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Угловая скорость маховика

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 150}{30} = 5\pi \text{ рад/с.}$$

Угол, на который повернется маховик, сделав $\varphi_{06} = 200$ оборотов, равен

$$\varphi = 2\pi\varphi_{06} = 2\pi \cdot 200 = 400\pi \text{ радиан.}$$

Подставляя данные, определяем искомый вращающий момент:

$$M_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2\varphi} = \frac{41\,670 \cdot 25\pi^2}{2 \cdot 400\pi} \approx 4080 \text{ Н} \cdot \text{м} = 4,08 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Задача 117 На шкив (рис. 257) радиуса R весом G_1 навешена веревка, к концу которой подвешен груз весом G_2 ; в начальный момент система находится в покое. Найти угловую скорость шкива в тот момент, когда груз опустится на высоту h . Массу шкива считать равномерно распределенной по его наружной поверхности. Трением пренебречь.

Решение. Так как система вначале находилась в покое, то ее начальная кинетическая энергия T_0 равна нулю. Кинетическая энергия T системы при движении груза будет складываться из кинетической энергии T_1 самого груза и кинетической энергии T_2 приводимого им во вращение шкива. Кинетическая энергия груза $T_1 = M_2 v^2 / 2$, где $M_2 = G_2 / g$. Так как скорость v груза связана с угловой скоростью ω шкива зависимостью $v = \omega R$, то кинетическая

энергия груза

$$T_1 = \frac{M_2 R^2 \omega^2}{2} = \frac{G_2 R^2 \omega^2}{2g},$$

кинетическая энергия шкива

$$T_2 = \frac{J \omega^2}{2}.$$

Момент инерции шкива находим по формуле (186):

$$J = M_1 R^2 = \frac{G_1}{g} R^2.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{G_1 R^2 \omega^2}{2g},$$

и тогда кинетическая энергия всей системы

$$T = T_1 + T_2 = \frac{G_2 R^2 \omega^2}{2g} + \frac{G_1 R^2 \omega^2}{2g} = \frac{\omega^2 R^2}{2g} (G_1 + G_2).$$

Так как изменение кинетической энергии системы происходит только за счет работы силы тяжести опускающегося на высоту h груза, то в уравнении (188) кинетической энергии системы надо положить

$$\sum A = G_2 h.$$

Таким образом, уравнение кинетической энергии системы в данном случае приобретает вид

$$\frac{\omega^2 R^2}{2g} (G_1 + G_2) = G_2 h.$$

Отсюда искомая угловая скорость шкива

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2ghG_2}{G_1 + G_2}}.$$

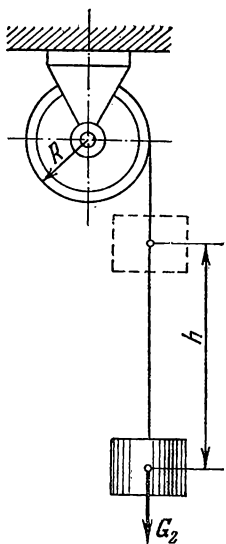


Рис. 257

Задача 118. Танк (рис. 258) приводится в движение двигателем, который вращает четыре колеса (по два с каждой стороны). Колеса своими выступами захватывают гусеницы. Определить скорость танка через 10 с после начала его движения, если средняя полезная мощность двигателя $N_{\text{ср}} = 200$ кВт, масса танка $M_1 = 10\,000$ кг, масса каждой гусеницы $M_2 = 700$ кг, масса каждого колеса $M_3 = 200$ кг. Колеса считать однородными сплошными цилиндрами.

Решение. Рассматриваемая система состоит: 1) из поступательно движущегося корпуса танка, 2) двух гусениц, каждая из которых движется поступательно вместе с танком и одновременно с той же скоростью совершает движение относительно корпуса танка, и 3) четырех колес, вращающихся вокруг своих осей и вместе с ними перемещающихся поступательно, т. е. совершающих плоскопараллельное движение.

Кинетическая энергия корпуса танка

$$T_1 = \frac{M_1 v^2}{2}.$$

Кинетическая энергия гусениц

$$T_2 = 2 \left(\frac{M_2 v^2}{2} + \frac{M_2 v^2}{2} \right) = 2M_2 v^2.$$

Кинетическая энергия колес

$$T_3 = 4 \left(\frac{M_3 v^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2} \right).$$

Скорость точек оси колеса равна поступательной скорости танка. Следовательно, угловая скорость колес

$$\omega = \frac{v}{R},$$

где R — радиус колеса.
Момент инерции
(сплошного цилиндра)

$$J = \frac{M_3 R^2}{2}.$$

колеса

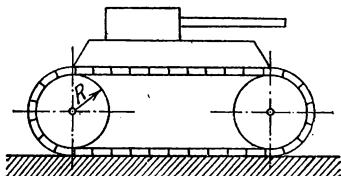


Рис. 258.

Таким образом, кинетическая энергия колес

$$T_3 = 4 \left(\frac{M_3 v^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2} \right) = 4 \left(\frac{M_3 v^2}{2} + \frac{M_3 R^2 v^2}{2 \cdot 2 R^2} \right) = 3M_3 v^2.$$

Кинетическая энергия всего танка

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{M_1 v^2}{2} + 2M_2 v^2 + 3M_3 v^2 = \frac{v^2}{2} (M_1 + 4M_2 + 6M_3).$$

Так как в начале движения танка его кинетическая энергия $T_0 = 0$, то уравнение (188) кинетической энергии системы принимает вид

$$T = \sum A.$$

Следовательно, полезная работа двигателя, приводящая в движение танк,

$$\sum A = T = \frac{v^2}{2} (M_1 + 4M_2 + 6M_3).$$

Средняя полезная мощность двигателя

$$N_{\text{ср}} = \frac{\sum A}{t} = \frac{v^2 (M_1 + 4M_2 + 6M_3)}{2t}.$$

Отсюда скорость танка через 10 с после начала его движения

$$v = \sqrt{\frac{2tN_{\text{ср}}}{M_1 + 4M_2 + 6M_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 20\,000}{10\,000 + 4 \cdot 700 + 6 \cdot 200}} \approx \\ \approx 16,9 \text{ м/с} = \frac{16,9 \cdot 3600}{1000} \text{ км/ч} \approx 60,8 \text{ км/ч}.$$

Евгений Михайлович Никитин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
для техникумов

М., 1977 г., 416 стр. с илл.

Редакторы *В. Г. Демин, А. Г. Мордвинцев*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева*

Корректор *Н. Б. Румянцева*

Сдано в набор 01.02.77 г. Подписано к печати
25.07.1977 г. Бумага 84×108¹/₃₂ тип. № 3. Физ. печ.
л. 13. Условн. печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 21,3. Ти-
раж 200 000 экз. (1-й завод: 1—100 000 экз.). Цена
книги 70 коп. Заказ № 479.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117371, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома

при Государственном комитете Совета

Министров СССР по делам издательства,

полиграфии и книжной торговли.

198062, Ленинград, Л 52, Измайловский
проспект, 29

70 к.